

Hochschule München
Fakultät 03

Skript
zur
Darstellenden Geometrie

Nach Vorlagen von Prof. Dr. Schwägerl und
Prof. Dr. Schulz
Stand: März 2012

Vorwort

Mit großer Freude können wir nun der Fachschaft das vollständige Skript zur Darstellenden Geometrie kostenlos zur Verfügung stellen. Das Werk basiert auf dem erprobten Material der Herren Prof. Dr. Schwägerl und Prof. Dr. Schulz, die dieses Lehrgebiet vertreten haben. Ihnen gilt unser besonders herzlicher Dank für die Genehmigung, die Zeichnungen und Texte unentgeltlich verwenden zu dürfen.

In den letzten Jahren veränderten sich auch die Voraussetzungen der Studenten. Heute kann nicht nahtlos an die behandelten Sachverhalte der Darstellenden Geometrie der Schulausbildung angeknüpft werden. Aber gerade für Studenten der Fachrichtungen Maschinenbau, Fahrzeugtechnik und Flugzeugtechnik ist eine Grundlagenausbildung auf diesem Gebiet notwendig. Elemente der Projektionsverfahren - insbesondere der Zweitafelprojektion - werden konservativ erarbeitet. Diese Tätigkeit trägt zum Verständnis räumlicher Sachverhalte und damit zur Weiterentwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens bei und ist somit eine unabdingbare Voraussetzung für die bildliche Darstellung von Konstruktionen.

Bei der Ausarbeitung des vorliegenden Materials ist auch die Mitarbeit der sehr erfolgreichen Tutorin Frau Lohmann hervorzuheben, die mit der Umgestaltung des Skripts in die digitale Form begann. Ihre Arbeit wurde durch Herrn Baier fortgesetzt. Auch ihnen danken wir.

Trotz aller Bemühungen können Fehler nicht völlig ausgeschlossen werden. Wir bitten dies von vornherein zu entschuldigen und sind für Hinweise darauf dankbar.

Den Studenten der o. g. Fachrichtungen und allen anderen interessierten Leserinnen und Lesern wünschen wir viele Erfolgserlebnisse mit diesem Skript.

Alles Gute für Ihr Studium wünschen Ihnen

Prof. Dr. rer. nat. Thomas Pöschl und Dr.-Ing. Karin Vielemeyer

1 Einleitung

Die Methoden der Konstruktiven Geometrie ermöglichen

- die Abbildung dreidimensionaler Sachverhalte (z.B. Objekte, Bahnkurven bei räumlichen Bewegungsabläufen, Strahlengänge)
- Lösung räumlicher Aufgaben in der zweidimensionalen Zeichenebene.

Die hierzu verwendeten Abbildungsverfahren beruhen auf der **Projektion** des räumlichen Sachverhaltes in eine Bildebene. Dies geschieht durch die Vorstellung von geeigneten Projektionsstrahlen. Man unterscheidet dabei zwischen:

1.1 Zentralprojektion

Alle Projektionsstrahlen gehen durch dasselbe Zentrum, das einen gewissen Abstand von der Zeichenebene hat.

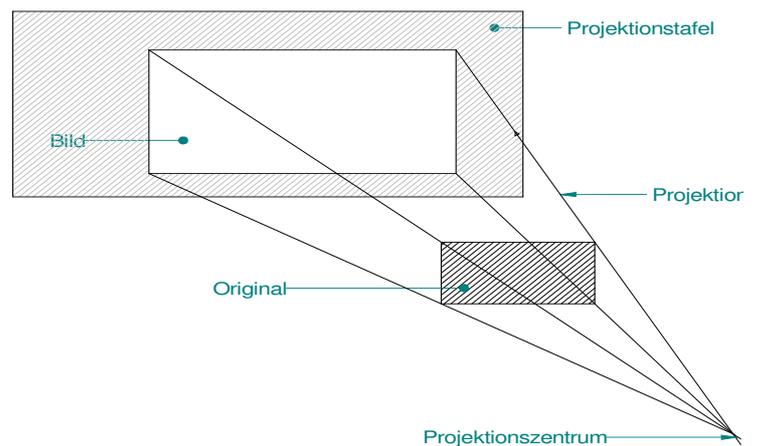


Abbildung 1-1: Zentralprojektion

1.2 Parallelprojektion

Alle Projektionsstrahlen sind zueinander parallel. Alle Strahlen haben dieselbe Projektionsrichtung.

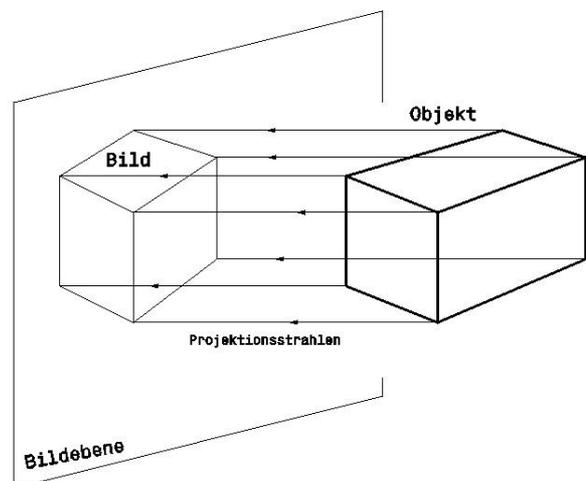


Abbildung 1-2: Parallelprojektion

Für beide Projektionsarten gilt:

Jeder räumliche Punkt wird als Punkt, durch den der Strahl verläuft, abgebildet.

Jede Gerade wird als Gerade abgebildet. Wenn eine Gerade mit einem Strahl zusammenfällt, erscheint sie als Punkt (Abb. 1-3).

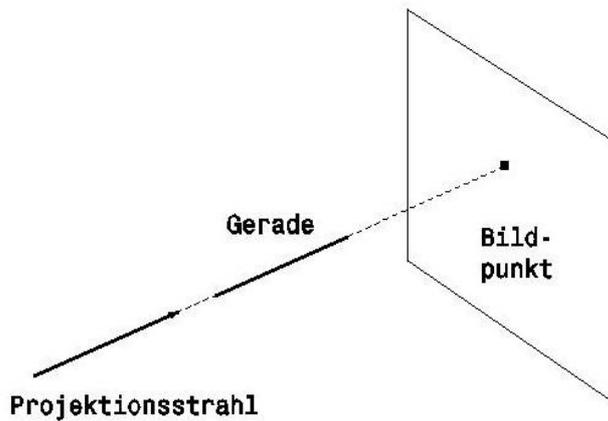


Abbildung 1-3: Projektion

Jede Ebene wird als Ebene abgebildet. Wenn Projektionsstrahlen in der Ebene liegen, erscheint sie als Gerade.

Uns interessiert im Folgenden nur die Parallelprojektion.

2 Parallelprojektion

Bei der Parallelprojektion unterscheidet man zwischen der schiefwinkligen und rechtwinkligen Parallelprojektion.

Für (rechtwinklige und schiefwinklige) Parallelprojektion gilt:

Zur Bildtafel parallel liegende ebene Figuren werden kongruent (deckungsgleich) abgebildet:

Parallele Geraden werden als parallele Bildgeraden abgebildet, außer wenn die Geraden mit einem Projektionsstrahl zusammenfallen. Es kann auch vorkommen, dass mehrere zueinander parallele Geraden in der Bildebene zu parallelen Geraden zusammenfallen, die den Abstand null haben, so dass man nur noch eine Gerade erkennen kann.

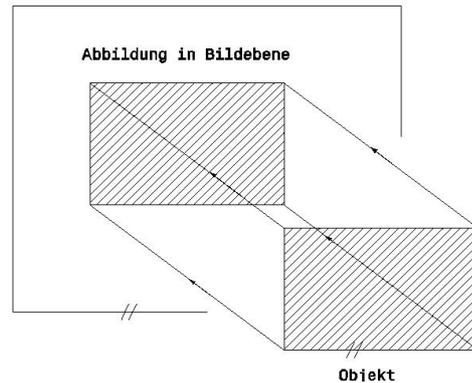


Abbildung 2-1

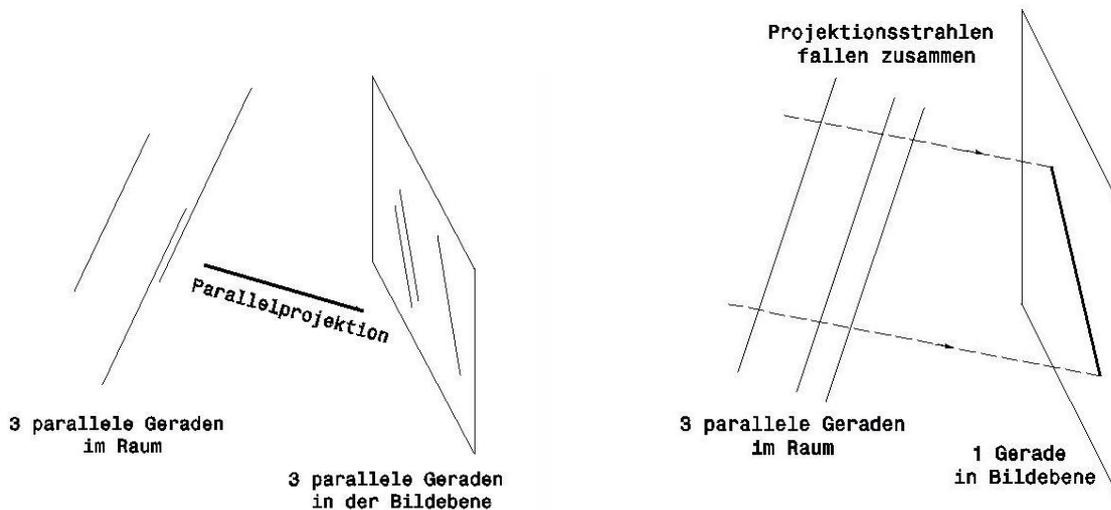


Abbildung 2-2

Das Teilverhältnis einer Strecke, die nicht die Richtung der Projektionsstrahlen hat, bleibt bei der Abbildung erhalten.

Bei rechtwinkliger Parallelprojektion gilt zusätzlich:

Ein **rechter Winkel** wird genau dann als rechter Winkel abgebildet, wenn mindestens einer seiner Schenkel parallel zur Bildebene und der andere nicht senkrecht zur Bildtafel liegt.

Man verwendet verschiedene Verfahren, um ein Objekt mittels Parallelprojektion abzubilden:

Axonometrische Verfahren dienen zur Herstellung möglichst anschaulicher Bilder von räumlichen Sachverhalten.

Kotierte Projektion dient zur Herstellung von eindeutigen, räumlichen Zeichnungen; wird im Vermessungswesen für Geländedarstellungen, z.B. Landkarten mit Höhenangaben und Maßstab, und in Teilgebieten des Bauwesens verwendet, aber auch gelegentlich im Maschinenbau, z.B. bei der Darstellung der Form von Turbinenschaufeln oder Schnitten durch eine Autokarosserie.

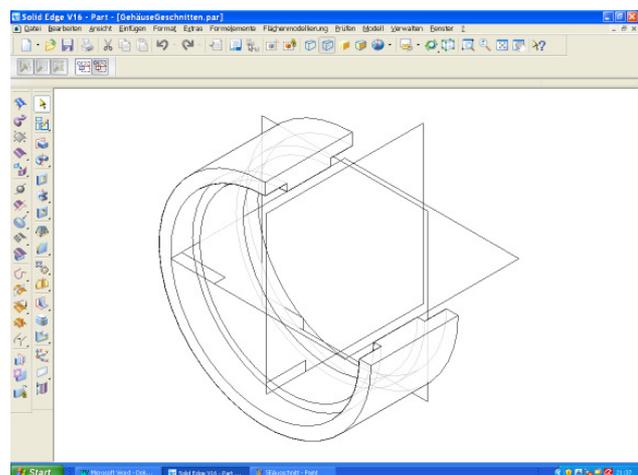
Das Zweitafelverfahren dient zur Herstellung von Konstruktionszeichnungen, durch die räumliche Sachverhalte eindeutig dargestellt werden können. Es wird ab Kapitel 6 ausführlich erläutert.

Schiefwinkliger Parallelprojektion wird verwendet bei Verfahren der schiefwinkligen Axonometrie (Kap. 3).

Rechtwinkliger Parallelprojektion wird verwendet bei:

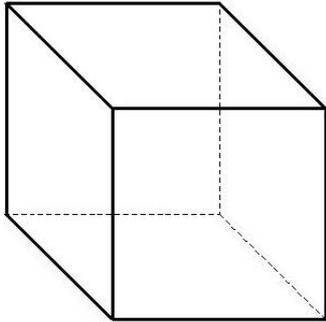
- kotierte Projektion (Kap. 5)
- Zweitafelverfahren (Kap. 6)
- rechtwinklige Axonometrie

Abbildung 2-3



3 Axonometrie

Das Wort Axonometrie kommt von dem veralteten Wort „Achsonometrie“ und ist eine Darstellungsform mit Hilfe von Koordinaten-**Achsen**. Axonometrie verwendet man, um möglichst anschauliche Bilder von Objekten zu erhalten. Dies wird jedoch nur dann erreicht, wenn die üblichen Blickrichtungen beim Betrachten des Bildes und die Richtung der Projektionsstrahlen der Abbildung nicht zu sehr voneinander abweichen.



Man erkennt das daran, dass z. B. das Bild eines Würfels sofort anschaulich wirkt. (Abb. 3-1)

Abbildung 3-1: Würfel

Wenn sich jedoch Blickrichtung und Projektionsrichtung zu sehr unterscheiden, erscheint das Bild verzerrt. Hier kann nicht sofort erkannt werden, dass es sich bei dem abgebildeten Objekt um einen Würfel handelte.

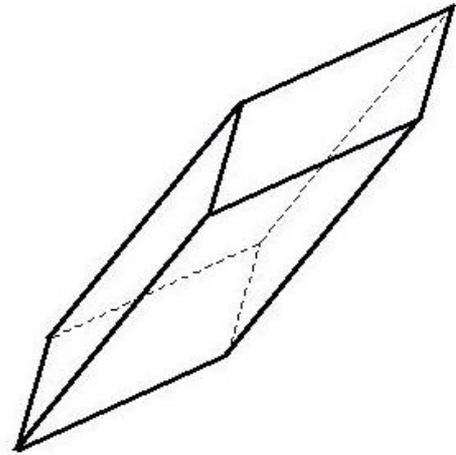


Abbildung 3-2: Würfel verzerrt

Ändert der Betrachter jetzt den Blickwinkel, erkennt er den Würfel. (Die linke, untere Blattecke direkt ans Auge halten und flach über das Blatt auf Abb. 3-2 schauen.)

Unterteilung:

Es gibt **schiefwinklige** und **rechtwinklige** Axonometrie. In Kapitel 4 wird auf die schiefwinklige Axonometrie eingegangen.

4 Schiefwinklige Axonometrie

An das abzubildende Objekt wird ein rechtwinkliges räumliches Rechtskoordinatensystem (RKS) mit dem Nullpunkt 0 und den Achsen x , y und z gelegt. Die Richtung von Symmetrieachsen oder Kantenrichtungen sollten nach Möglichkeit Richtung der Koordinatenachsen sein.

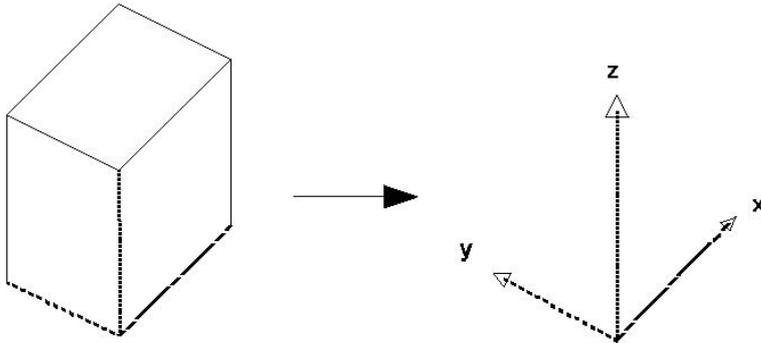


Abbildung 4-1

Ein räumliches Koordinatensystem $Oxyz$ heißt **rechtwinklig**, wenn alle drei Koordinatenachsen (x -, y - und z - Achse) **senkrecht** zueinander sind.

Ein Koordinatensystem, bei dem die 90° -Drehung die positive x -Achse in die positive y -Achse überführt und zusammen mit einem Vorschub in Richtung der positiven z -Achse eine **Rechts-schraubung** ergibt, nennt man ein **rechtwinkliges räumliches Rechtskoordinatensystem**.

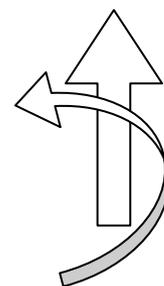
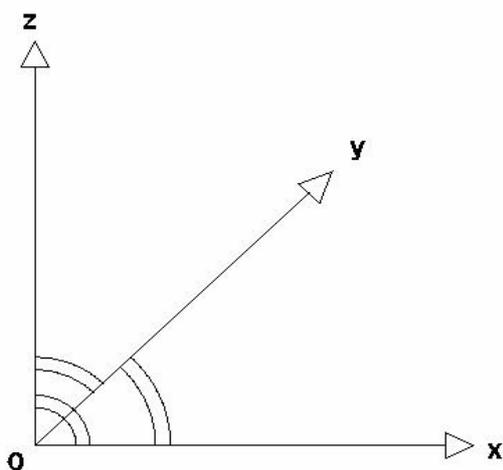


Abbildung 4-2

Das Objekt wird zusammen mit dem Koordinatensystem $Oxyz$ mittels schiefwinkliger Parallelprojektion in eine **Bildebene** π projiziert. Das dadurch entstehende Bild wird mit \overline{Oxyz} bezeichnet. Wenn die Strecken der Koordinatenachsen s_x , s_y und s_z heißen, nennt man deren Bilder $\overline{s_x}$, $\overline{s_y}$ und $\overline{s_z}$.

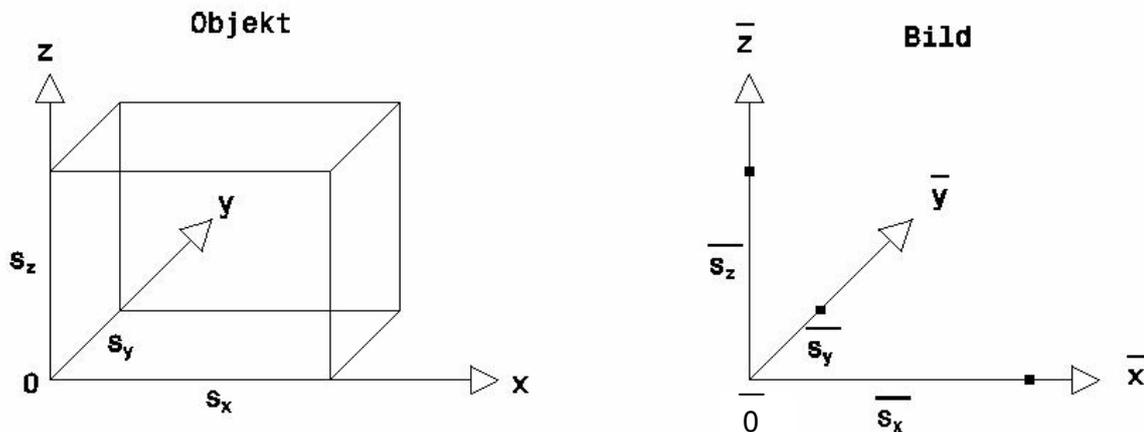


Abbildung 4-3

Das Verhältnis von Objekt zum Bild wird als Abbildungsmaßstab bezeichnet. Diese Maßstäbe für die drei Achsenrichtungen sind:

Maßstab = Bildstrecke : Objektstrecke

$$m_x = \overline{s_x} : s_x$$

$$m_y = \overline{s_y} : s_y$$

$$m_z = \overline{s_z} : s_z$$

Beispiel:

Die Objektstrecke hat die Länge 10 cm. Die Bildstrecke hat die Länge 5 cm.

$$\rightarrow \text{Maßstab} = 5 \text{ cm} : 10 \text{ cm} = 1 : 2$$

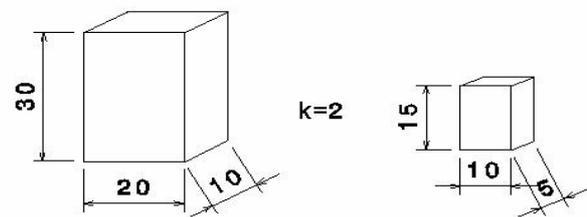
Strecken in gleicher Richtung werden jeweils im gleichen Maßstab abgebildet. Den Bildpunkt \overline{P} eines Objektpunktes P erhält man durch Abbildung seiner Koordinaten der Strecken in x -, y - und z - Richtung.

Satz von Pohlke (gilt nur für die schiefwinklige Axonometrie)

Es gibt stets eine Parallelprojektion, durch die das RKS $Oxyz$ auf das Bild \overline{Oxyz} abgebildet werden kann, wenn in der Bildebene π vom Bildpunkt \overline{O} (Koordinatenursprung) aus drei Strahlen \overline{x} , \overline{y} und \overline{z} in beliebigen Richtungen angenommen werden. Es dürfen jedoch maximal zwei Strahlen in dieselbe Richtung verlaufen.

Außerdem können die Abbildungsmaßstäbe m_x , m_y und m_z unabhängig voneinander gewählt werden. So kann man **Vergrößerungen oder Verkleinerungen** in die jeweilige Richtung bewirken. Die Abbildungsmaßstäbe werden bei jeder Achse jeweils mit angegeben.

Multipliziert man jeden Abbildungsmaßstab mit einem **Faktor k** (Zoomfaktor), so erhält man



Original

Bild

Abbildung 4-4

für $k > 1$ ein ähnlich vergrößertes,

für $1 > k > 0$ ein ähnlich verkleinertes Bild des Objektes. (Abb. 4-4)

Geht beim Objekt die positive z-Achse nach oben und treffen die Projektionsstrahlen die xy-Ebene auch von oben, so erhält man eine **Draufsicht** des Objektes. Treffen die Strahlen die xy-Ebene von unten, erhält man eine **Untersicht**.

Räumlich rekonstruieren lässt sich ein Objekt aus seinem axonometrischen Bild nicht ohne Hinzunahme weiterer Informationen. Der Betrachter kann dies manchmal aus der Erfahrung heraus, ohne sich darauf aber absolut verlassen zu können (siehe Würfel Abb. 3-1 und 3-2).

Um eine **eindeutige** Rekonstruierbarkeit zu erzielen, wendet man folgende Verfahren an:

- Kotierte Projektion (Kap. 5)
- Zweitafelverfahren (Kap. 6)

Übung:

$$x_p = 70 \text{ mm}$$

$$y_p = 60 \text{ mm}$$

$$z_p = 45 \text{ mm}$$

sind die Koordinaten eines Raumpunktes P.

In Abbildung 4-5 konstruiere man

- sein axonometrisches Bild \bar{P}
- das axonometrische Bild des Quaders mit der Raumdiagonalen OP, dessen Kanten die Richtung der Koordinatenachsen haben.

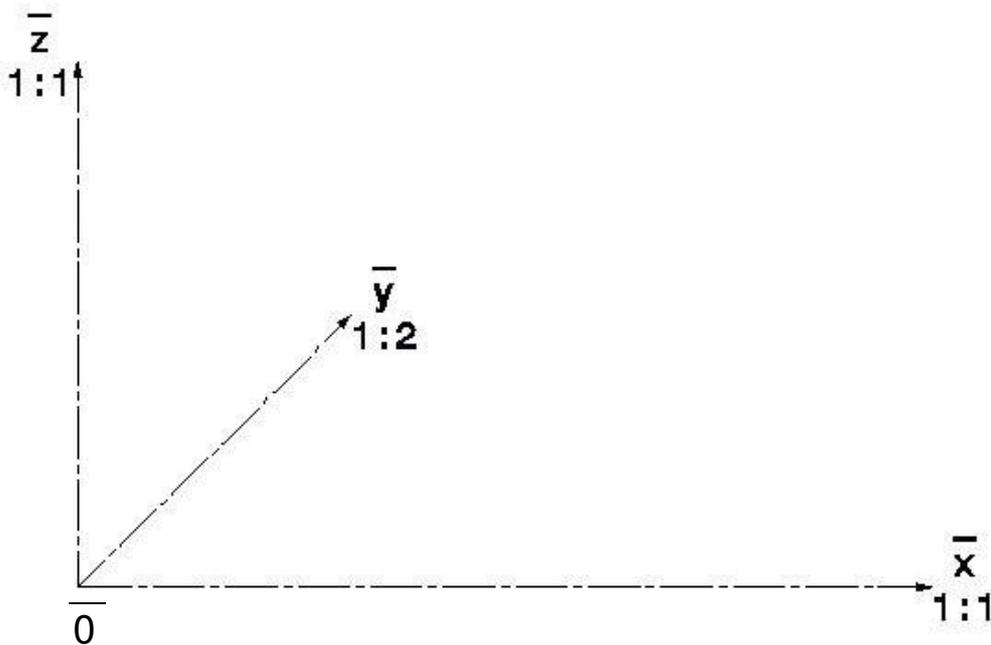


Abbildung 4-5

Verdeckte Kanten zeichne man gestrichelt.

5 Kotierte Projektion

Die Abbildung erfolgt durch senkrechte Parallelprojektion in eine Bildebene π (z. B. horizontale Grundrisstafel π_1). Neben den Bildern von Punkten und tafelparallelen Linien werden deren „Koten“, d.h. deren Abstände zur Bildebene π_1 (Höhen oder Tiefen) angeschrieben. Dadurch ist ihre Lage im Raum eindeutig bestimmt. Jeder kennt dies aus Landkarten, wo durch Maßstab und Höhenangaben eindeutig bestimmt die Geländeformen wiedergegeben werden.

Abbildung in 3D:

- Punkt P liegt im Raum
- wird dargestellt in einer horizontalen Bildebene $\pi_1 \rightarrow P'$
- Kote h wird angeschrieben

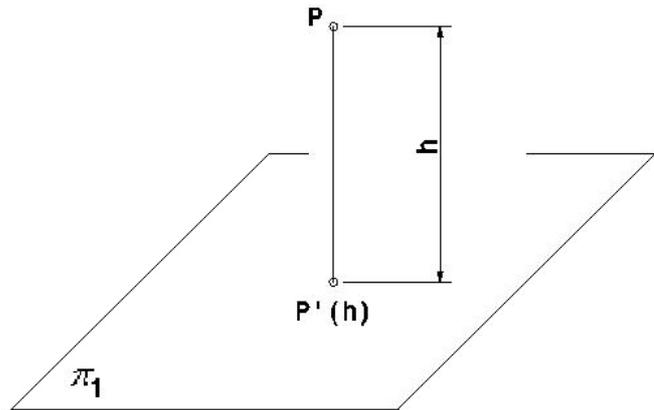


Abbildung 5-1

Abbildung in 2D:

- Bildebene π_1 liegt genau in der Papierebene, also der Betrachter schaut senkrecht darauf
- Lage von P bestimmbar, da $P'(h)$ zeigt, wie groß der Abstand zur Bildebene ist

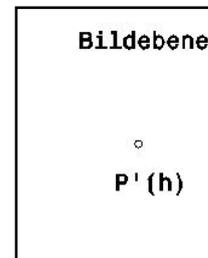


Abbildung 5-2

→ **Eindeutige Reproduzierbarkeit**, wo der Punkt im Raum liegt

6 Zweitafelverfahren

Zwei zueinander senkrechte Bildtafeln

(Bildebenen) ergeben ein Zweitafelssystem. Wir

nennen:

- die horizontale Ebene Grundrisstafel π_1 ,
- die vertikale Ebene Aufrisstafel π_2 .

1. Das Objekt wird durch jeweils senkrechte Parallelprojektion in jede der beiden Tafeln abgebildet.

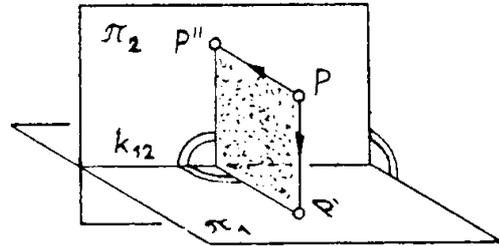


Abbildung 6-1

2. Dann wird eine der beiden Tafeln um die **Risskante (= Schnittgerade** beider Bildebenen; k_{12} im Zweitafelssystem $\pi_1\pi_2$) geklappt, so dass schließlich beide Tafeln in der Zeichenebene liegen.

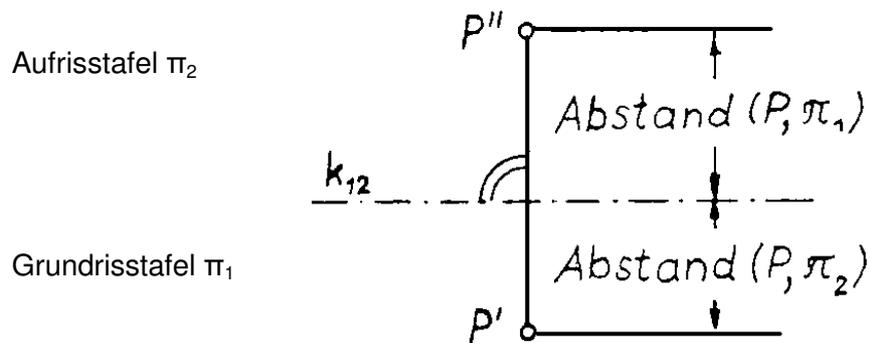


Abbildung 6-2

Das Bild von Punkt P in der Grundrisstafel nennt man **Grundriss** P'. Das Bild von P in der Aufrisstafel nennt man **Aufriss** P''.

Abstand von dem Raumpunkt P zur Grundrisstafel = Abstand von P'' zu k_{12}

Abstand vom Raumpunkt P zur Aufrisstafel = Abstand von P' zu k_{12}

Durch die beiden Risse von Punkt P ist also die Lage bezüglich der Bildtafeln **eindeutig bestimmt**.

Stets liegen solche zusammengehörigen Risse eines Punktes auf einem gemeinsamen Lot zur betreffenden Risskante. Dieses Lot heißt **Ordnungslinie**.

Merke:

Zweitafelsystem $\pi_1\pi_2$;

besteht aus **Grundrisstafel π_1** und **Aufrisstafel π_2 ;**

Schnittgerade ist die **Risskante k_{12} ;**

Riss von einem Punkt P heißt in der Grundrisstafel **P'** (**Grundriss** von P), in der Aufrisstafel **P''** (**Aufriss** von P);

Ordnungslinie $P'P'' \perp k_{12}$

π_1 und π_2 teilen den Raum in **vier**

Quadranten:

I: über π_1 , vor π_2

II: über π_1 , hinter π_2

III: unter π_1 , hinter π_2

IV: unter π_1 , vor π_2

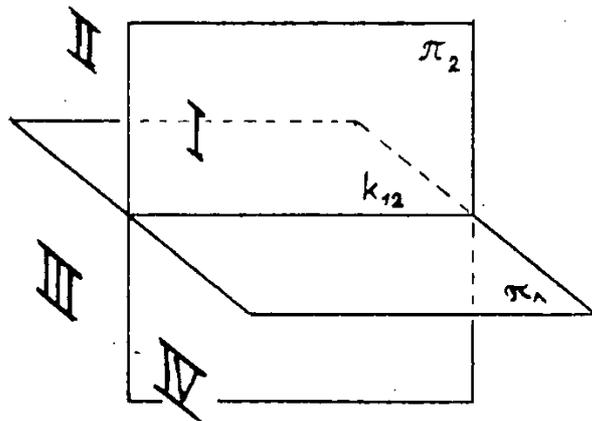


Abbildung 6-3

Meist legt man das abzubildende Objekt in den I. Quadranten. Grundsätzlich können aber immer auch andere Lagen auftreten oder sogar zweckmäßig sein; z. B. wenn man eine Bildebene als Symmetrieebene eines Objektes nutzen will. In der Automobilindustrie liegt der Nullpunkt eines Fahrzeugs in der Mitte der Vorderachse.

7 Abbildung von Punkten, Geraden und Ebenen im Zweitafelverfahren

7.1 Lage von Punkten

Durch die in Abb. 7-1 gezeichneten Risse ist jeweils die räumliche Lage eines Punktes P eindeutig bestimmt. (Von einer Ausnahme abgesehen, bei der kein solcher Punkt P existiert.)
 Man beschreibe die jeweiligen Lagen in den freigelassenen Feldern.

| | | | | | |
|---------------|---------------|--|--|--|--|
| Risse von P | | | | | |
| P liegt | im Quadranten | | | | |
| | I | | | | |

Abbildung 7-1

| | | | | |
|---------------|--|--|--|--|
| Risse von P | | | | |
| Beschreibung: | | | | |

Abbildung 7-2

7.2 Gerade im Raum

Durch zwei nicht zusammenfallende Punkte kann genau eine **Gerade gelegt** werden (Abb. 7-3 und 7-4).

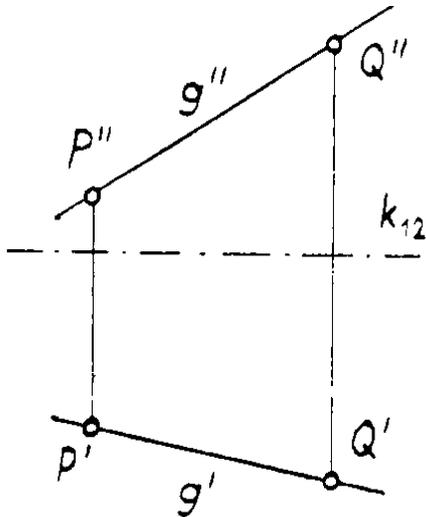


Abbildung 7-3

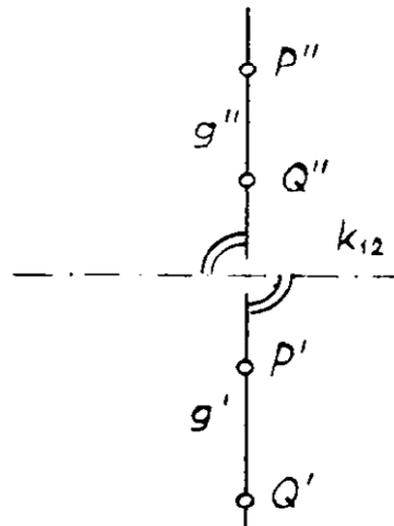


Abbildung 7-4

In Abbildung 7-3 ist die räumliche Lage der Geraden g auch dann noch **eindeutig bestimmt**, wenn man die Risse der Punkte P und Q weglässt (Abbildung 7-5). In Abbildung 7-4 dagegen ist die Lage der Gerade g **nicht** mehr **eindeutig bestimmt**, wenn man die Risse der Punkte P und Q weglässt (Abbildung 7-6).

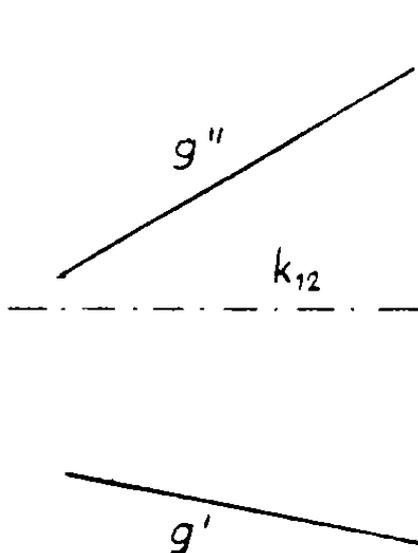


Abbildung 7-5

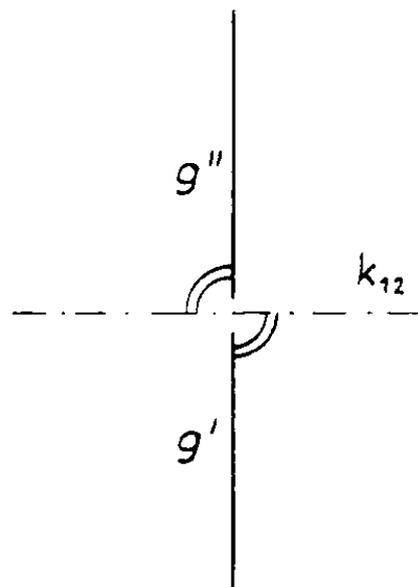


Abbildung 7-6

Ist eine **Gerade senkrecht zu einer Bildtafel**, so ist ihr gesamter Riss in dieser Tafel ein einziger Punkt (Abb. 7-7). Die Lage der Gerade ist dann allein durch diesen Riss schon eindeutig bestimmt.

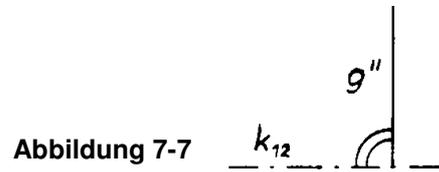


Abbildung 7-7

7.3 Ebene im Raum

Genau eine Ebene kann gelegt werden

- durch **3 Punkte**, die nicht auf einer Geraden liegen (Abb. 7-8)
- durch **einen Punkt und** eine den Punkt nicht enthaltende **Gerade** (Abb. 7-9)
- durch zwei einander schneidende Geraden (Abb. 7-10)
- durch **zwei zueinander parallele Geraden**.

$$g \perp \pi_1 \quad g' \circ$$

Von zwei parallelen Geraden sagt man auch: „Sie schneiden sich im Unendlichen.“ (Abb. 7-11)

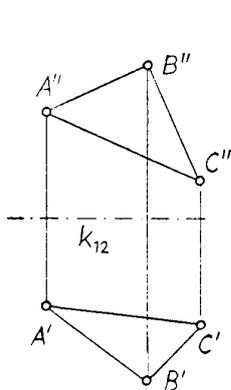


Abbildung 7-8

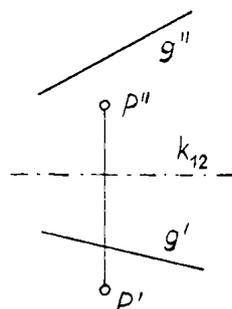


Abbildung 7-9

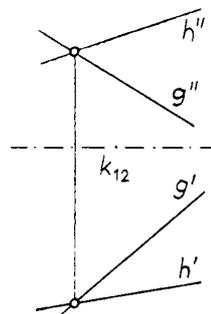


Abbildung 7-10

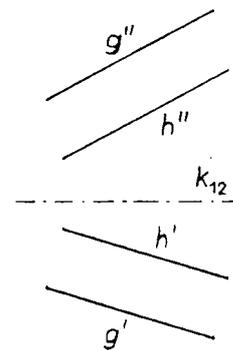


Abbildung 7-11

Durch die Risse ist jeweils die räumliche Lage der Ebene eindeutig bestimmt. Ist eine Ebene senkrecht zu einer Bildtafel, so ist ihr gesamter Riss in dieser Tafel eine einzige Gerade. Die Lage der Ebene ist dann allein durch diesen Riss schon eindeutig bestimmt. (Abb. 7-12)

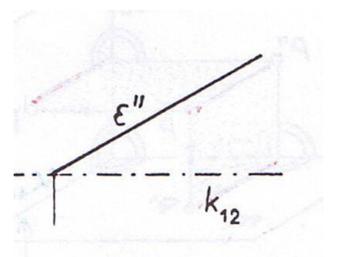


Abbildung 7-12

Übung

Aus einem Skriptendeckel oder Schnellhefter, dessen eine Hälfte horizontal liegt und dessen andere Hälfte senkrecht dazu gehalten wird, baue man ein Zweitafelsystem $\pi_1 \pi_2$ auf. Durch

einen Stift bzw. ein Geodreieck kann man dann die räumliche Lage der oben jeweils durch ihre Risse bestimmten Geraden und Ebenen veranschaulichen.

7.4 Windschiefe Geraden

Durch zueinander windschiefe Geraden kann man **keine Ebene legen**. Bei der Abbildung windschiefer Geraden bringt man die **Sichtbarkeitsverhältnisse** zum Ausdruck, um eine möglichst anschauliche Darstellung zu erhalten. Dazu unterbricht man jedes Bild der Geraden dort, wo sie von der anderen verdeckt wird. Man findet dies folgendermaßen heraus:

- Von zwei Punkten, die **denselben Grundriss** haben, ist im Grundriss derjenige **verdeckt** (Gerade wird unterbrochen dargestellt), der tiefer liegt; dessen Bild in der Zeichenebene im Aufriss also weiter „**unten**“ in Richtung von k_{12} liegt.
- Von zwei Punkten, die **denselben Aufriss** haben, ist im Aufriss derjenige **verdeckt**, der weiter hinten liegt; dessen Bild in der Zeichenebene im Grundriss also weiter „**oben**“ in Richtung von k_{12} liegt.

Übung: Diese Sichtbarkeitsbestimmung führe man in **Abbildung 7-13** durch.

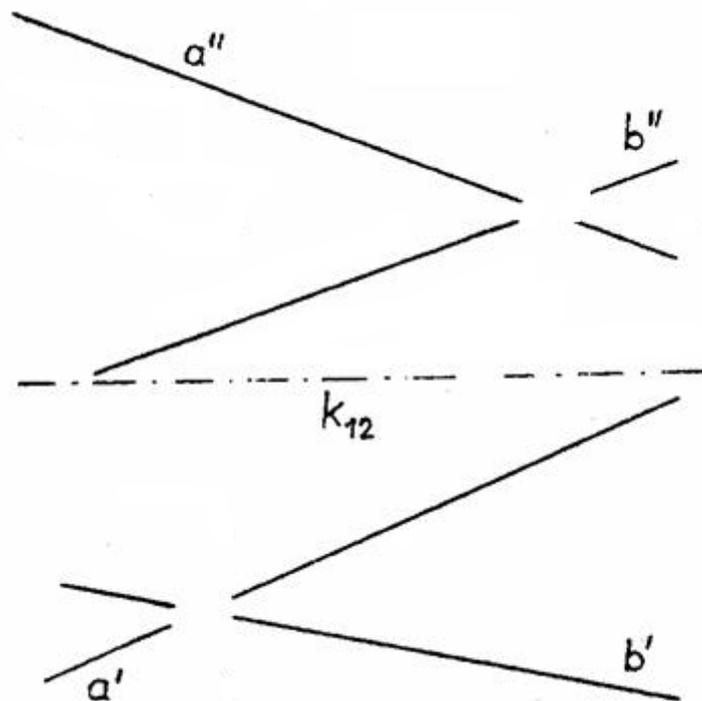


Abbildung 7-13

Ist eine ganze Strecke verdeckt, zeichnet man sie gestrichelt (siehe Übung Quader zeichnen).

8 Ergänzung des Zweitafelensystems durch weitere Bildtafeln

Sind nicht alle wichtigen Punkte eines Objektes in den Rissen bezeichnet, so genügt oft zur **eindeutigen Bestimmung** des räumlichen Sachverhaltes ein einziges Paar von Bildtafeln nicht (siehe Abb. 7-6, letztes Kapitel). Auch in Abb. 8-1 ist das durch Grund- und Aufriss dargestellte Objekt nicht notwendigerweise ein Würfel; einige Objekte, die diese Risse besitzen, sind in Abb. 8-2 skizziert.

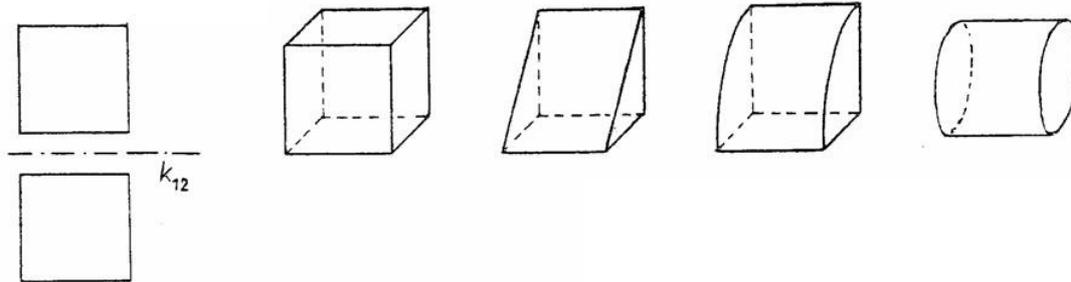


Abbildung 8-1

Abbildung 8-2

Um die nötige Klarheit zu schaffen, führt man eine geeignete neue Bildtafel ein. Auch wenn am Objekt Richtungen auftreten, die parallel zur Bildtafel liegen sollen, damit die Abbildung **verständlicher** wird, führt man eine weitere Bildtafel ein.

Jede solche neue Bildtafel ist **senkrecht** zu einer bereits vorhandenen, so dass sie zusammen wieder ein Zweitafelensystem bilden. In jede neue Bildtafel wird das Objekt wieder durch senkrechte **Parallelprojektion** abgebildet.

Wenn die neue Bildtafel sogar zu beiden vorhandenen Tafeln senkrecht ist, nennt man sie **Kreuzrisstafel** π_3 . Ist die neue Bildtafel zu einer bereits vorhandenen Tafel senkrecht, nennt man die neue Tafel **allgemeine Seitenrisstafel** π_4 .

Kreuzrisstafel π_3 :

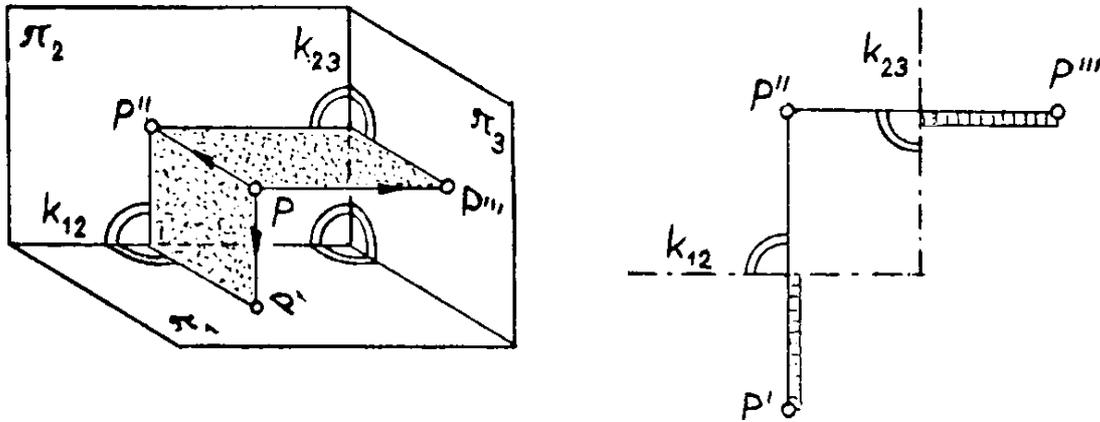
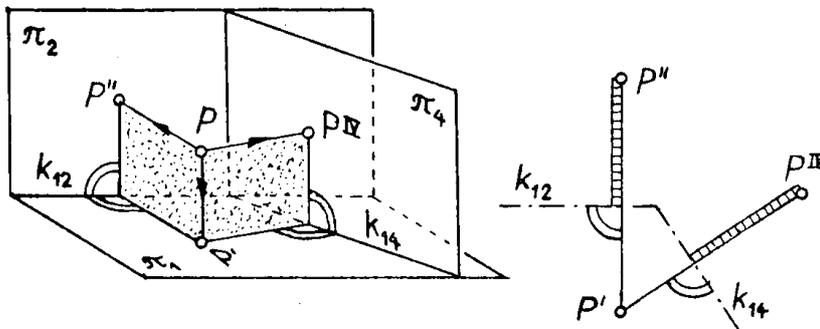


Abbildung 8-3

Die neue Kreuzrisstafel π_3 ist senkrecht zu π_1 und π_2 ; sie wird üblicherweise zu einem neuen Zweitafelensystem zu $\pi_2\pi_3$ zusammengefasst.

| | |
|-------------------|---|
| Zweitafelensystem | $\pi_2\pi_3$ |
| Tafeln: | Aufrisstafel π_2 und Kreuzrisstafel π_3 |
| Risskante | k_{23} |
| Risse von P: | Aufriss P'' Kreuzriss P''' |
| Ordnungslinie: | $P''P''' \perp k_{23}$ |
| Abstandsregel: | Abstand (P''', k_{23}) = Abstand (P', k_{12}) |

Abbildung 8-4: Allgemeine Seitenrisstafel π_4



Eine allgemeine Seitenrisstafel π_4 ist senkrecht zu π_1 ; sie wird üblicherweise zu einem neuen Zweitafelensystem zu $\pi_1\pi_4$ zusammengefasst:

| | |
|-------------------|---|
| Zweitafelensystem | $\pi_1\pi_4$ |
| Tafeln: | Grundrisstafel π_1 und Seitenrisstafel π_4 |
| Risskante | k_{14} |
| Risse von P: | Grundriss P' Seitenriss P^{IV} |
| Ordnungslinie: | $P'P^{IV} \perp k_{14}$ |
| Abstandsregel: | Abstand (P^{IV}, k_{14}) = Abstand (P', k_{12}) |

Allgemein gilt:

Die in einem Zweitafelensystem zusammengehörigen Risse eines Punktes liegen stets auf **einer Ordnungslinie**, also einem gemeinsamen Lot zur jeweiligen Risskante.

Abstandsregel: In allen Bildtafeln, die mit einer festen Bildtafel je ein Zweitafelensystem bilden, haben die Risse eines Punktes gleiche Abstände von den dazugehörigen Risskanten, weil alle diese Abstände gleich dem Abstand des Punktes von der festen Bildtafel sind.

Beispiel 1 (siehe Abb. 8-3)

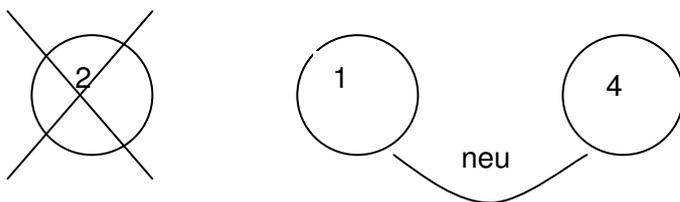
Feste Bildtafel ist $\pi_2 \rightarrow$ es gibt die beiden Zweitafelensysteme $\pi_1\pi_2$ und $\pi_2\pi_3$.

Abstand von Punkt P zur festen Bildtafel π_2 ist immer gleich:

\rightarrow Abstand von P' zu k_{12} = Abstand von P''' zu k_{23}

Beispiel 2 (siehe Abbildung 8-4)

2 fällt weg – 1 fest - 4 kommt neu hinzu \rightarrow Abstand von P'' zu k_{12} = Abstand von P^{IV} zu k_{14}



Beispiel 3

In Abb. 8-5 bildet jede der beiden Tafeln π_m und π_n mit π_l je ein Zweitafelensystem. Die Tafel π_l ist also die feste Tafel. Der Punkt P hat zu dieser Tafel einen bestimmten Abstand. Dieser Abstand wird in den beiden Rissen π_m und π_n abgebildet und ist gleich groß. Daher gilt:
 Abstand $(P^{(n)}, k_{ln}) = \text{Abstand}(P^{(m)}, k_{lm}) \rightarrow$ der schraffierte Abstand.

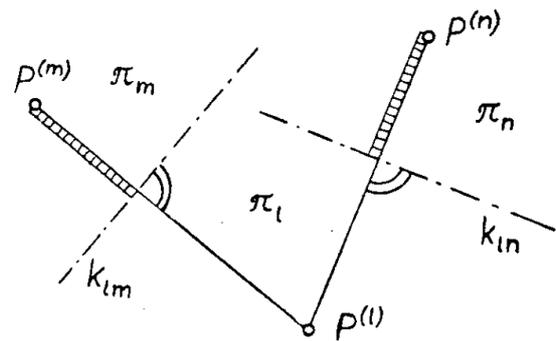


Abbildung 8-5

Vereinfachung

Von zwei Bildtafeln, die mit einer festen Tafel je ein Zweitafelensystem bilden, kann die eine wegfallen, nachdem die andere neu eingeführt wurde. Deswegen kann die **Abstandsregel** auch so formuliert werden:

**Der Abstand des neuen Risses zur neuen Risskante
 ist gleich
 dem Abstand des wegfallenden Risses von der wegfallenden Risskante.**

9 Grundkonstruktionen im Zweitafelsystem

Objekte der Grundkonstruktionen sind Punkte, Geraden (bzw. Strecken) und Ebenen (bzw. geradlinige begrenzte ebene Figuren, also ebene Vielecke). Die Grundkonstruktionen sind in vier Gruppen gegliedert:

- Inzidenzkonstruktionen (I)
- Schnittkonstruktionen (S)
- Lotkonstruktionen (L)
- Konstruktionen von gesuchten und mit gegebenen wahren Längen und Größen (W)

9.1 Inzidenzkonstruktionen

Inzidenz ist eine Beziehung zwischen geometrischen Objekten. Man spricht von Inzidenz, wenn ein Objekt im anderen enthalten ist. Z. B. kann eine Gerade einen Punkt enthalten oder eine Ebene enthält eine Gerade. Mathematisch gesehen handelt es sich um eine Relation, die als „Element von“ oder „Teilmenge von“ ausgedrückt werden kann: $P \in g$ oder $g \subset \varepsilon$.

9.1.1 Punkt auf einer Geraden

Gegeben: Gerade g durch Grundriss g' und Aufriss g'' (Abb. 9-1); durch zusätzlichen Kreuzriss g''' (Abb. 9-2). Außerdem noch der Grundriss P' von einem Punkt P auf der Geraden g .

Gesucht: Aufriss P'' von dem Punkt P

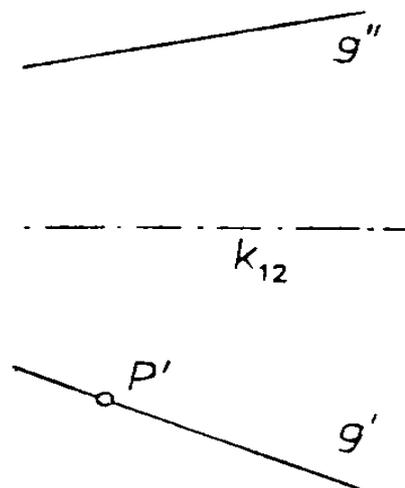


Abbildung 9-1

Lösung:

a) (Abb. 9-1) mittels Ordnungslinie, die senkrecht auf k_{12} steht, und den Aufriss g'' von der Gerade g schneidet. $\rightarrow P''$

b) (Abb.9-2) über den Kreuzriss durch Verwendung der Abstandsregel:

Abstand $(P', k_{12}) = \text{Abstand}(P''', k_{23})$ in π_3 abtragen (Parallele zu k_{23} mit dem gemessenen Abstand einzeichnen); Parallele schneidet Riss g''' der Geraden $g \rightarrow P'''$

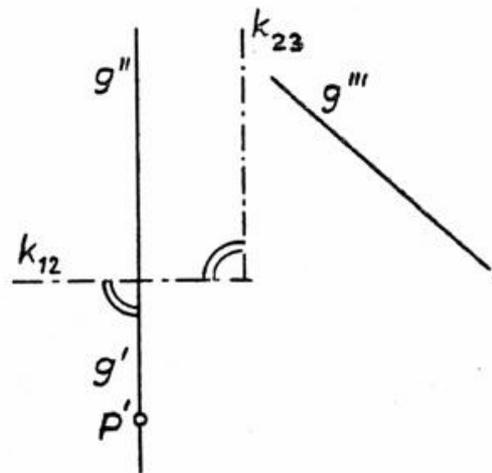


Abbildung 9-2

Übertrag durch Ordnungslinie (senkrecht zu k_{23}); Ordnungslinie schneidet $g'' \rightarrow P''$

„**Besondere Punkte**“ einer Geraden sind ihre **Spurpunkte**. So nennt man die Schnittpunkte der Geraden mit den Bildtafeln (Abb. 9-3). Es gibt nur dann Spurpunkte, wenn die Gerade nicht in oder parallel zu einer Bildtafel liegt.

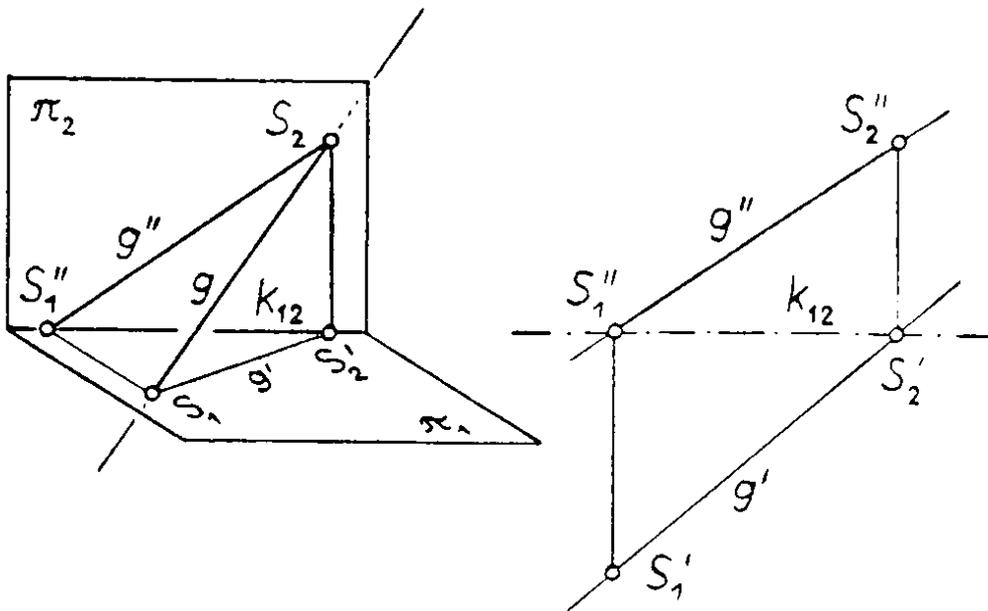


Abbildung 9-3

$$S_1 = g \cap \pi_1$$

$$S_2 = g \cap \pi_2$$

$$S_1'' \text{ und } S_2' \text{ liegen auf } k_{12}$$

$$S_1 = S_1'$$

$$S_2 = S_2''$$

9.1.2 Gerade in einer Ebene

Gegeben: Ebene ε (z.B. durch zwei sich schneidende Geraden c und d) und der Grundriss g' einer Geraden g von ε (**Abbildung 9-4** und **Abbildung 9-5**).

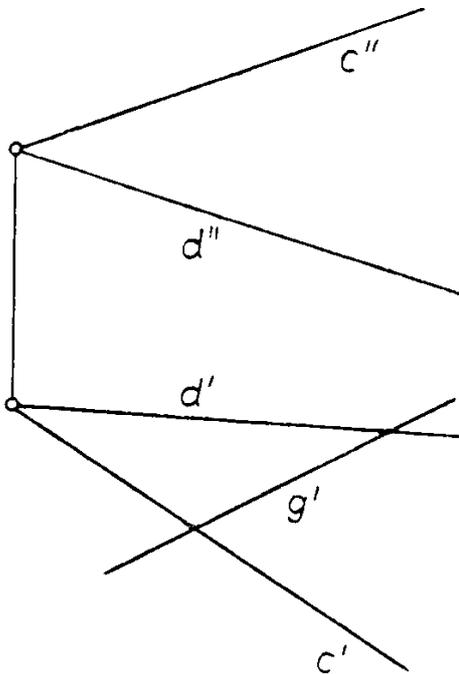


Abbildung 9-4

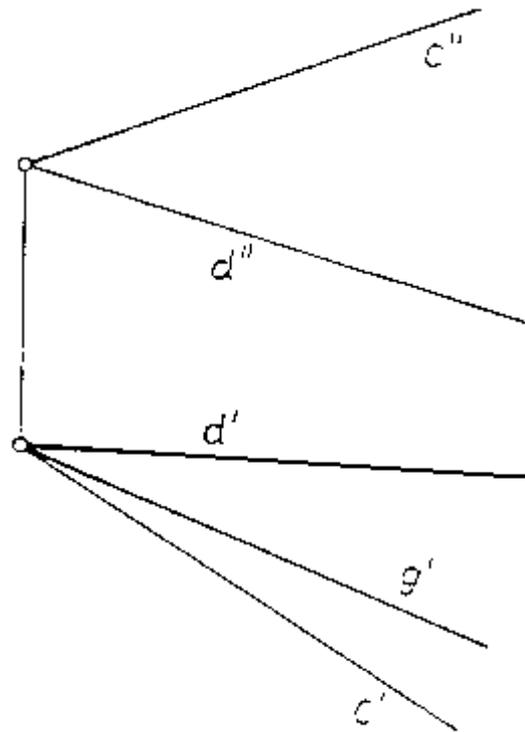


Abbildung 9-5

Gesucht: Aufriss g'' von Gerade g

Lösung:

a) g schneidet c und d in verschiedenen Punkten. Deren Aufrisse erhält man wie siehe „Punkt auf einer Geraden“ durch die Ordnungslinien. Daraus entstehen zwei Punkte im Aufriss, deren Verbindung g'' bestimmt.

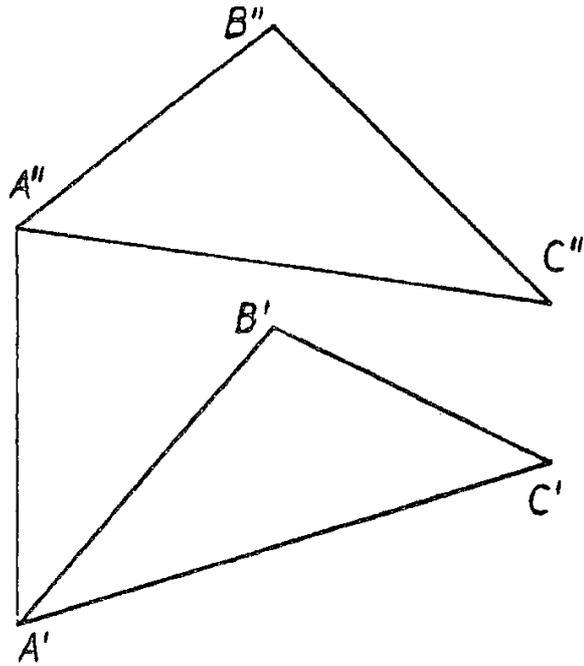
b) g verläuft durch den Schnittpunkt $c \cap d$. Man verwendet eine Hilfsgerade h von ε , die c und d in verschiedenen Punkten schneidet. Der Grundriss der Hilfsgeraden h wird angenommen, h'' erhält man durch Abbildung der beiden Schnittpunkte (mit c' und d') im Aufriss (siehe „Punkt auf einer Geraden“) $\rightarrow h'' \cap c''$ und $h'' \cap d''$. Beide Hilfspunkte miteinander verbinden \rightarrow ergibt $h'' \rightarrow$ Bestimmung von g'' .

Beispiel 1:

Von der in Abb. 9-6 durch das Dreieck ABC
gegebenen Ebene ermittle man eine

- Höhenlinie p_1
- Frontlinie p_2
- Falllinie f

durch einen jeweils möglichst günstig
gelegenen Punkt.

**Abbildung 9-7**Lösung:

$p_1'' \parallel k_{12}$, also senkrecht zu irgendeiner Ordnungslinie, günstig: durch $A'' \rightarrow p_1''$

p_1 schneidet BC im Hilfspunkt H; Hilfspunkt in Grundriss ermitteln und mit A' verbinden $\rightarrow p_1'$

$p_2' \parallel k_{12}$, am besten durch C' verlaufen lassen $\rightarrow p_2'$

wieder über Hilfspunkt auf der Geraden A'B' $\rightarrow p_2''$ konstruieren

Falllinie f' senkrecht zu p_1' ; durch Punkt B' konstruieren $\rightarrow f'$

Durch Hilfspunkt auf der Geraden A'C' $\rightarrow f''$ konstruieren

Es können die Linien auch durch andere Punkte konstruiert werden, bei Verwendung der Ecken des Dreiecks wird sich jedoch die Anzahl der Konstruktionslinien relativ gering halten.

Beispiel 2:

Man konstruiere die Ebene ε im vierten Riss $\rightarrow \varepsilon^{\text{IV}}$

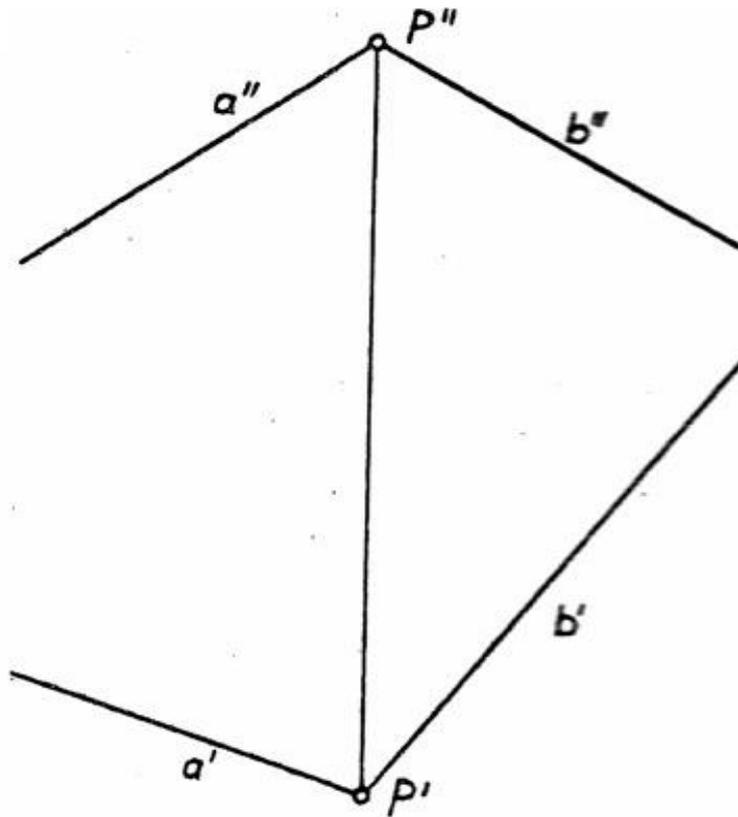


Abbildung 9-8

Ist p_1 Höhenlinie der Ebene ε , und führt man eine Seitenrisstafel $\pi_4 \perp \pi_1$ mit $k_{14} \perp p_1'$ ein, so ist $p_1 \perp k_{14}$ und damit die Ebene $\varepsilon \perp \pi_4$. Der gesamte 4. Riss von ε ist dann eine einzige Gerade. In Abb. 9-8 legt man k_{12} auf p_1'' , um nicht unnötig viele Konstruktionslinien zu zeichnen.

Anleitung:

Höhenlinie p_1 in Aufriss konstruieren. $\rightarrow p_1''$

zwei Hilfspunkte auf a'' und b'' eintragen $\rightarrow H_1''$ und H_2''

Hilfspunkte in Grundriss konstruieren $\rightarrow H_1'$ und H_2'

Höhenlinie im Grundriss durch Verbinden der zwei Hilfspunkte $\rightarrow p_1'$

Senkrecht zu p_1' und durch Vordruck $\rightarrow k_{14}$

Höhenlinie in 4. Riss (mit Abstandsregel) und $P^{\text{IV}} \rightarrow \varepsilon^{\text{IV}}$

9.1.3 Punkt in einer Ebene

Gegeben: Ebene ε (z.B. durch Dreieck ABC) und Grundriss P' eines Punktes P, der in der Ebene ε liegt

Gesucht: Aufriss P'' von Punkt P

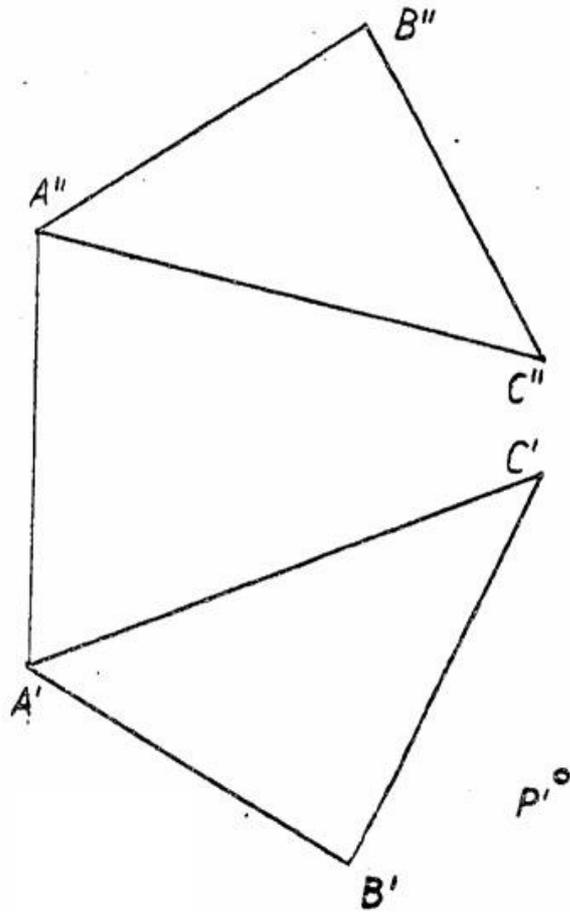


Abbildung 9-9

1. Lösung

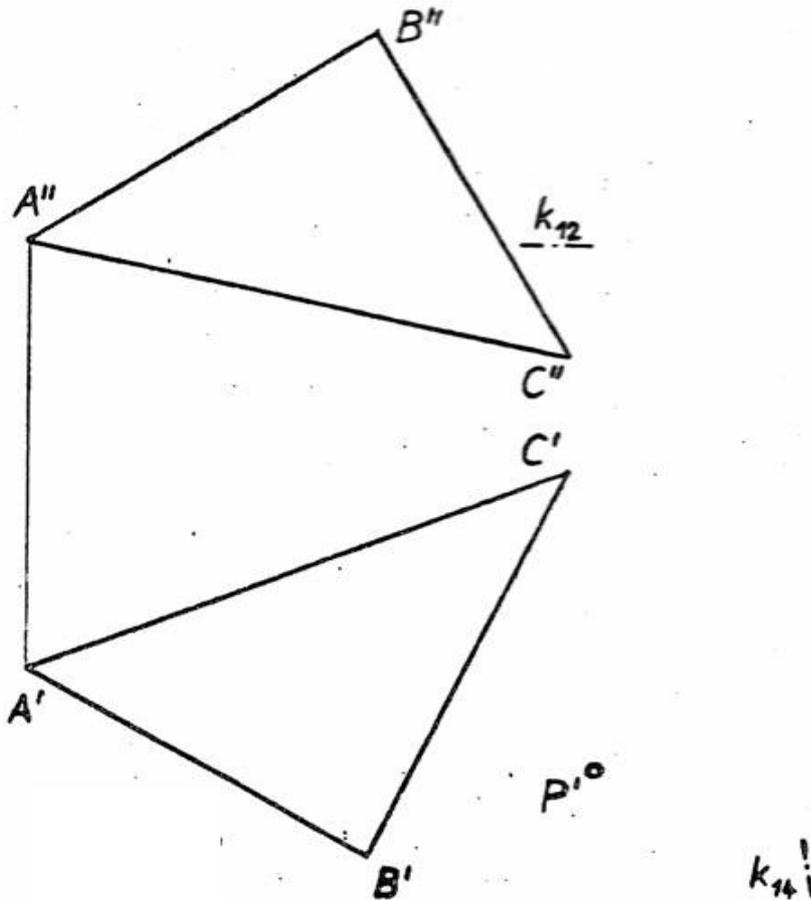
durch P wird eine Hilfsgerade h gezeichnet, die in ε liegt (h' durch A' und P')

h' schneidet B'C' \rightarrow Hilfspunkt H'

Ordnungslinie in den Aufriss \rightarrow Hilfspunkt H''

Gerade durch A'' und H'' \rightarrow h''

Ordnungslinie von P' in den Aufriss; als Schnittpunkt mit h'' ergibt sich P''

2. Lösung**Abbildung 9-10**

Wie bei der Lösung in Abb. 9-7 wird ein neuer Riss eingeführt $\pi_4 \perp \epsilon$. P^{IV} liegt dann auf ϵ^{IV} und P'' erhält man durch die Abstandsregel:

Höhenlinie p_1 im Aufriss (Vordrucklinie durch A'' verwenden)

durch Hilfspunkt Höhenlinie auch im Grundriss zeichnen

im Grundriss senkrecht zur Höhenlinie und unter Verwendung der Vordrucklinie die neue

Risskante k_{14} konstruieren

Punkte A, B und C im 4. Riss (Ordnungslinie; Abstandsregel: 1. Riss \rightarrow 4. Riss) $\rightarrow \epsilon^{IV}$ ist

Gerade

Ordnungslinie zu P' in 4. Riss schneidet ϵ^{IV} in P^{IV}

Ordnungslinie von P' in den Aufriss; Abstandsregel (4. Riss \rightarrow 1. Riss) $\rightarrow P''$

Dieser Weg ist angebracht, wenn ϵ^{IV} ohnehin benötigt wird, oder wenn man neue Risse von der Ebene ϵ braucht.

9.2 Schnittkonstruktionen

9.2.1 Schnittpunkte einer Geraden mit einer Ebene

Gegeben: Ebene ε (durch Dreieck ABC) und Gerade g in beiden Rissen.

Gesucht:

Schnittpunkt (Durchstoßpunkt) $P = g \cap \varepsilon$.

1. Lösung

Punkt P liegt auf g , also P' auf g' . Der Punkt P liegt ebenso in der Ebene ε . Wie bei der Lösung von Abb. 9-9 wählt man eine geeignete Hilfsgerade, die einerseits **in der Ebene ε** liegt und andererseits auch den Punkt P **auf der Geraden g** enthält, das heißt z. B. $h' = g'$. So liegt P' sicher auf h' . (Auch $h'' = g''$ ist möglich.)

Abbildung 9-11 – Erste Variante:

Den Aufriss h'' erhält man durch das Übertragen von den zwei Schnittpunkten mit den Geraden AC und BC in den Aufriss. Im Punkt $h'' \cap g''$ liegt der Aufriss P'' des Schnittpunktes $P = g \cap \varepsilon$. Mit Hilfe der Ordnungslinie erhält man den Grundriss P' .

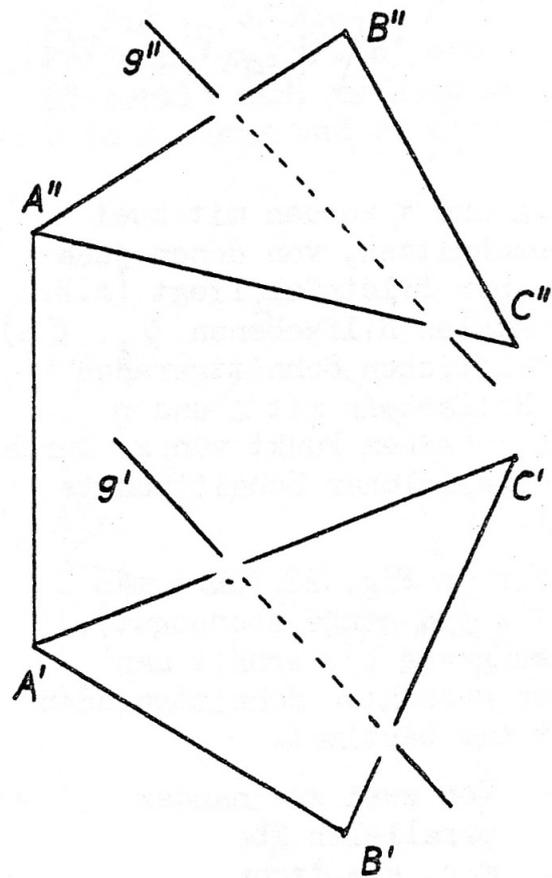


Abbildung 9-11 – Erste Variante

Achtung:

Ist im Aufriss $h'' \parallel g''$, liegt die Ebene $\varepsilon \parallel g$. Es gibt einen „**Schnittpunkt im Unendlichen**“;
Ist im Aufriss $h'' = g''$ liegt g in der Ebene ε und es gibt **unendlich viele gemeinsame Punkte**.

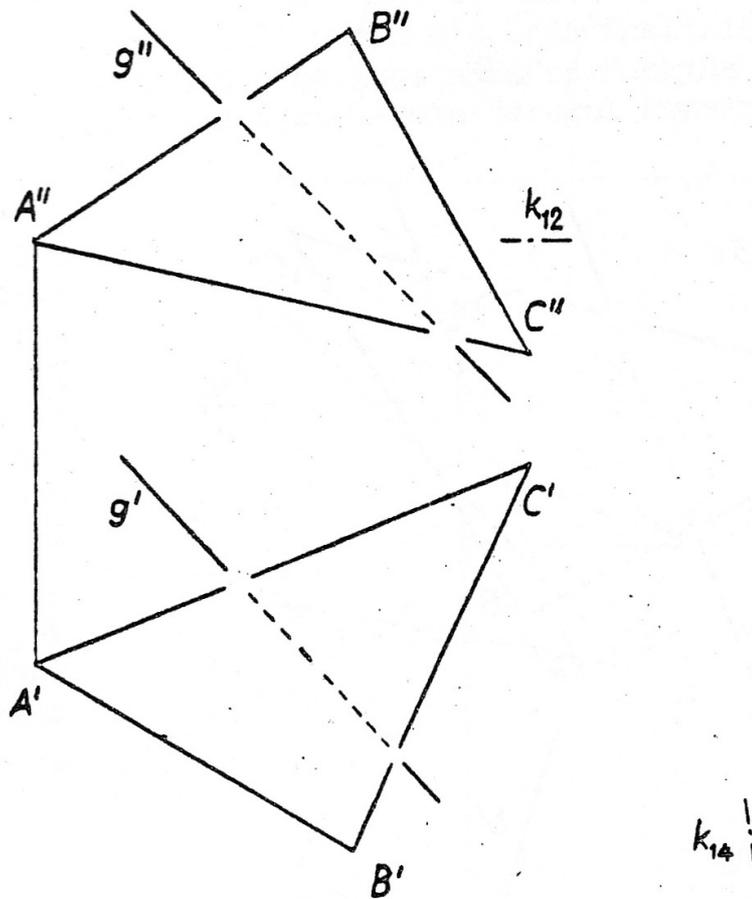


Abbildung 9-12 – Zweite Variante

2. Lösung

Man führt einen neuen Riss π_4 ein, ähnlich wie in Abb. 9-8 und 9-10, in den man alle **drei Punkte A^{IV} , B^{IV} und C^{IV}** des Dreiecks (der Ebene), die **Höhenlinie** bzw. Risskante k_{12} und die **Gerade g^{IV}** überträgt (Abstandsregel gebrauchen $\pi_1 \rightarrow \pi_4$). Die neue Risskante k_{14} soll senkrecht zur Höhenlinie aus dem Grundriss verlaufen. Unmittelbar ergibt sich $P^{IV} = g^{IV} \cap \varepsilon^{IV}$. P' und P'' erhält man durch die Übertragung mittels Ordnungslinien.

Dieser Weg ist angebracht, wenn eine größere Anzahl von Schnittpunkten in der Ebene ε gesucht ist.

Die **Sichtbarkeit** ermittelt man wie bei Abb. Abbildung 9-11 – Erste Variante.

9.2.2 Schnittgerade zweier Ebenen

Gegeben: Ebene ε (durch Dreieck ABC) und Ebene η (durch zwei parallele Geraden a und b).

Gesucht:

Schnittgerade $g = \varepsilon \cap \eta$.

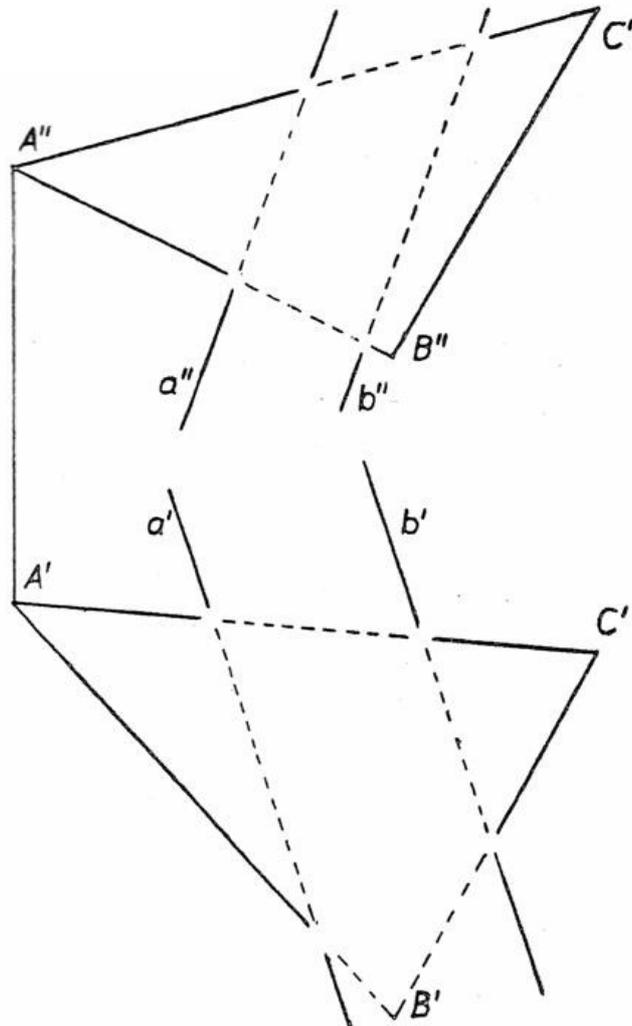
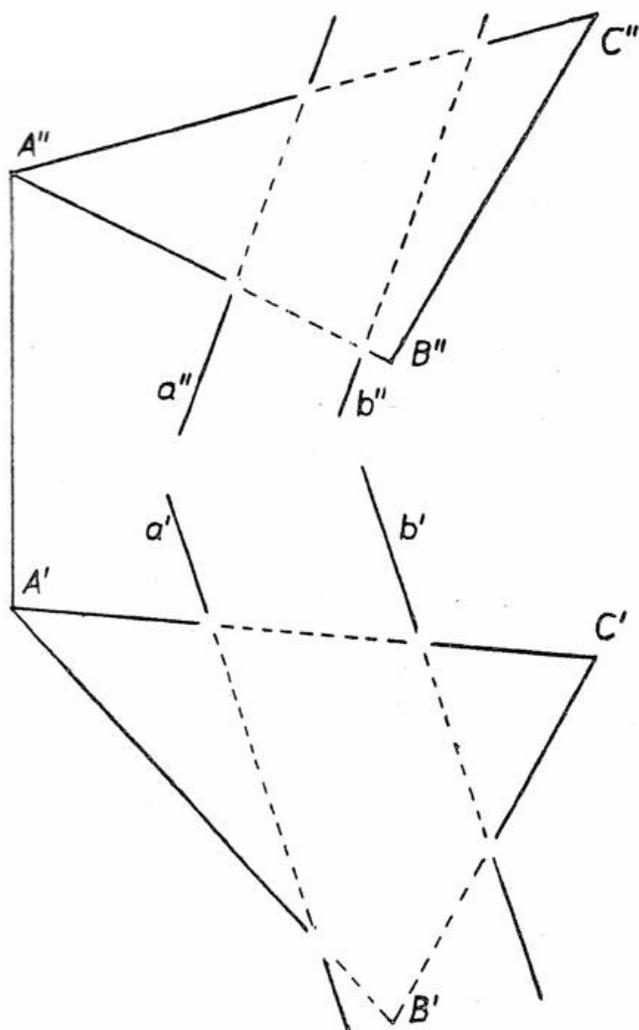


Abbildung 9-13 – Variante 1

Lösung:

Zwei Mal Schnittpunkt konstruieren: $a \cap \varepsilon = P$ und $b \cap \varepsilon = Q$. Die gesuchte Schnittgerade g verläuft durch den Punkt P und Q . (Es können auch andere Schnittpunkte verwendet werden, z. B. $AB \cap \eta$ oder $BC \cap \eta$.)

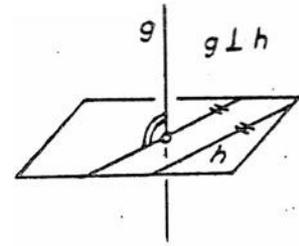
Abbildung 9-14 - Variante 2



9.3 Lotkonstruktionen

In den folgenden Konstruktionen kommen Risse zueinander windschiefer Geraden vor.

Abbildung 9-15



Begriffsbestimmung:

Durch einen beliebigen Punkt P legt man die Parallelen zu zwei gegebenen windschiefen Geraden g und h; schneiden sich die so erhaltenen Geraden senkrecht, so nennt man die windschiefen Geraden g und h **zueinander senkrecht**. Somit ist jedes Lot zu einer Ebene senkrecht zu **allen** Geraden der Ebene (Abbildung 9-15).

Merke (Wiederholung aus Kapitel 2 „Parallelprojektion“):

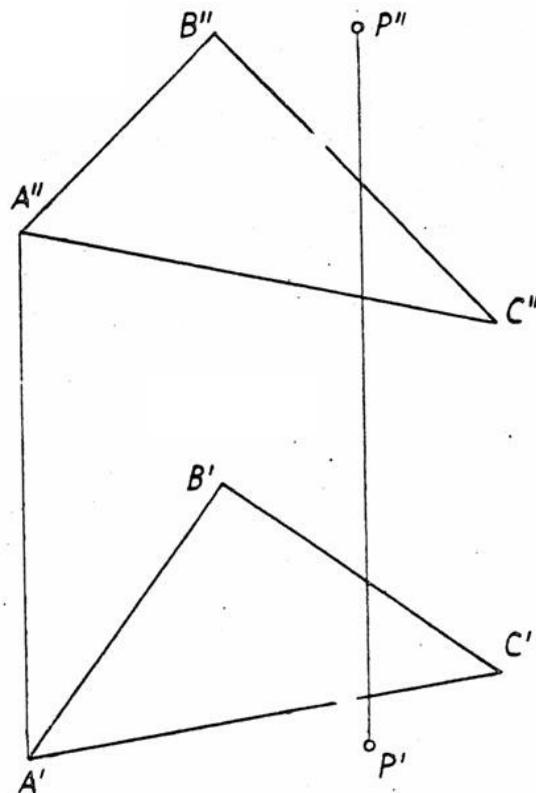
Zueinander senkrechte windschiefe Geraden haben zueinander senkrechte Bildgeraden, wenn mindestens eine von ihnen **parallel zur Bildtafel** liegt (und die andere nicht senkrecht zur Bildtafel).

9.3.1 Lot durch einen Punkt zu einer Ebene

Gegeben: Ebene ε (durch Dreieck ABC) und der Punkt P (egal, ob dieser in der Ebene liegt oder nicht)

Gesucht: Lot n zu ε durch Punkt P (ACHTUNG: Keine Falllinie konstruieren!!)

Abbildung 9-16



1. Lösung (Abb.9-16)

Man konstruiert die Risse einer Höhenlinie p_1 (z.B. durch Punkt A) und einer Frontlinie p_2 (z.B. durch Punkt C) von der Ebene ε , demnach ist $p_1'' \parallel p_2'' \parallel k_{12} \perp$ Ordnungslinie $A'A''$. Das Lot n ist senkrecht zu allen Geraden, die in der Ebene ε liegen, also auch zu p_1 und p_2 . Nach dem Merksatz (siehe oben) erhält man:

$$n' \perp p_1' \text{ (weil } p_1 \parallel \pi_1 \text{ ist)}$$

$$n'' \perp p_2'' \text{ (weil } p_2 \parallel \pi_2 \text{ ist)}$$

2. Lösung (Abb. 9-17)

Man führt einen vierten Riss mit $\pi_4 \perp \varepsilon$ ein, so dass ε^{IV} als Gerade erscheint. n^{IV} ist dann das Lot von P^{IV} auf ε^{IV} . Der Fußpunkt $F^{IV} = n^{IV} \cap \varepsilon^{IV}$. Das Lot n' im Grundriss erhält man senkrecht zu p_1' . Den Fußpunkt F' erhält man durch die Ordnungslinie von F^{IV} . Das Lot n'' im Aufriss erhält man, nachdem man F'' mit Hilfe der Ordnungslinie und der Abstandsregel konstruiert hat. Es gilt außerdem $n'' \perp p_2''$ (Kontrolle).

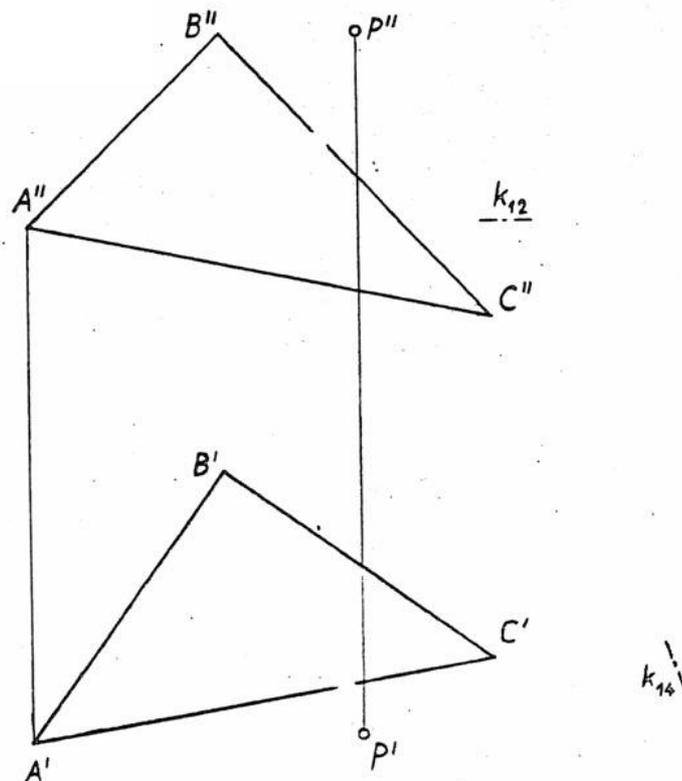


Abbildung 9-17

9.3.2 Lotebene durch einen Punkt zu einer Geraden

Gegeben: Gerade g und Punkt P (egal, ob auf der Geraden g oder nicht)

Gesucht: Lotebene ε zu g durch den Punkt P (Umkehrung von 9.3.1 „Lotebene durch einen Punkt zu einer Ebene“, letzter Abschnitt)

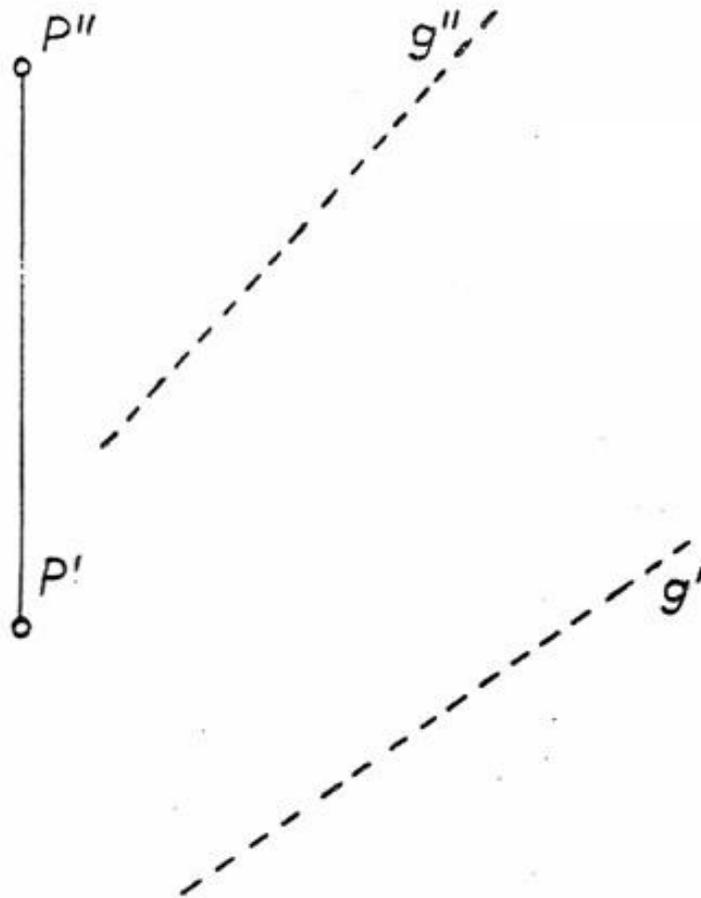


Abbildung 9-18

Lösung: Risse einer Höhenlinie p_1 und einer Frontlinie p_2 der Ebene ε durch den Punkt P konstruieren: $p_1'' \parallel p_2' \parallel k_{12} \perp P'P''$ und $p_1' \perp g'$ und $p_2'' \perp g''$. Damit ist die Lotebene ε durch die Höhenlinie p_1 und die Frontlinie p_2 bestimmt.

Falls P nicht auf g liegt, kann der Schnittpunkt $F = g \cap \varepsilon$ nach dem Verfahren in Kapitel 9.2 (Schnittkonstruktion) ermittelt werden.

9.3.3 Lot durch einen Punkt zu einer Geraden

Gegeben: Gerade g und Punkt P (liegt nicht auf g)

Gesucht: Lot n zu g durch den Punkt P

Lösung:

Entweder wie siehe 9.3.2 (Abbildung 9-18) \rightarrow Gerade PF ist das gesuchte Lot n

Oder:

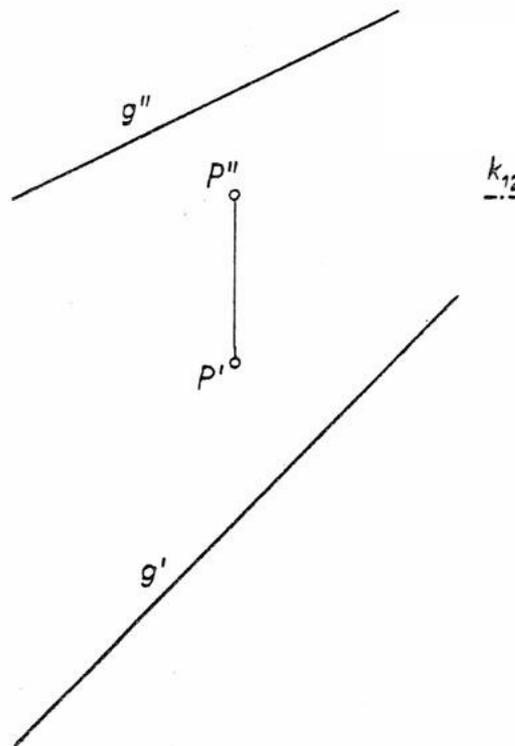


Abbildung 9-19

Falls die Gerade g in einer Bildtafel oder parallel dazu liegt, sind dort die Risse von n und g **senkrecht zueinander**. Führt man daher eine solche Bildtafel ein, z. B. eine Seitenrisstafel $\pi_4 \perp \pi_1$ und π_4 wird durch die Gerade g gelegt, so ist $k_{14} = g'$. Wird $\pi_4 \parallel g$ gelegt, so ist $k_{14} \parallel g'$. Die Risskante k_{12} kann man durch den Punkt P'' legen.

Wenn man im vierten Riss das Lot $n^{IV} \perp g^{IV}$ durch den Punkt P^{IV} fällt, erhält man ebenso den Fußpunkt $F^{IV} = n^{IV} \cap g^{IV}$. Daraus lassen sich die beiden Punkte F' und F'' und somit auch die Lotgeraden **n' und n''** konstruieren.

Wird die neue Bildtafel nicht senkrecht zu π_1 gelegt, sondern senkrecht zu π_2 , vertauschen Grund- und Aufriss ihre Rollen.

9.4 Wahre Längen und Größen

9.4.1 Wahre Länge einer Strecke

Gegeben: Grund- und Aufriss einer Strecke \overline{AB}

Gesucht: Wahre Länge der Strecke \overline{AB} ; abgekürzt: $wL(AB)$

Lösung: Falls die Strecke \overline{AB} in einer Bildtafel oder parallel zu einer Bildtafel liegt, erscheint sie im betreffenden Riss in wahrer Länge. **Folgende Bildtafeln**, zweckmäßig immer durch AB gelegt, können dazu bei Bedarf **neu eingeführt** werden: (Abbildung 9-19)

$\pi_4 \perp \pi_1$ also $k_{14} = A'B'$, k_{12} durch A'' oder B''

$\pi_5 \perp \pi_2$ also $k_{25} = A''B''$, k_{12} durch A' oder B'

Im neuen Riss erscheint die Strecke \overline{AB} jeweils in wahrer Länge.

Wegen der Einfachheit der Konstruktion spricht man häufig nicht von „Einführung eines neuen Risses“ (Risskanten und neue Risse von Punkten werden nicht extra benannt), sondern von der „**Umklappung des Stützdreiecks**“ (der umgeklappte Punkt wird lediglich mit einem Index versehen, z. B. B_0').

Weiterer Lösungsweg ohne eine neue Risskante:

Die Strecke \overline{AB} wird um eine zu π_1 senkrechte Achse, z.B. durch B , in eine zu π_2 parallele Lage A_0B gedreht. Der Drehkreis, auf dem A dabei wandert, erscheint im Grundriss in wahrer Gestalt, im Aufriss als Lot zum Aufriss der Drehachse. Ist das Lot zu $B'B''$ durch A'' gezeichnet (Aufriss des Drehkreises), so lässt sich der Rest der Konstruktion mit dem Stechzirkel allein durchführen (**hohe Genauigkeit!!**).

In entsprechender Weise kann eine zu π_2 senkrechte Drehachse für eine Drehung in eine zu π_1 parallele Lage verwendet werden.

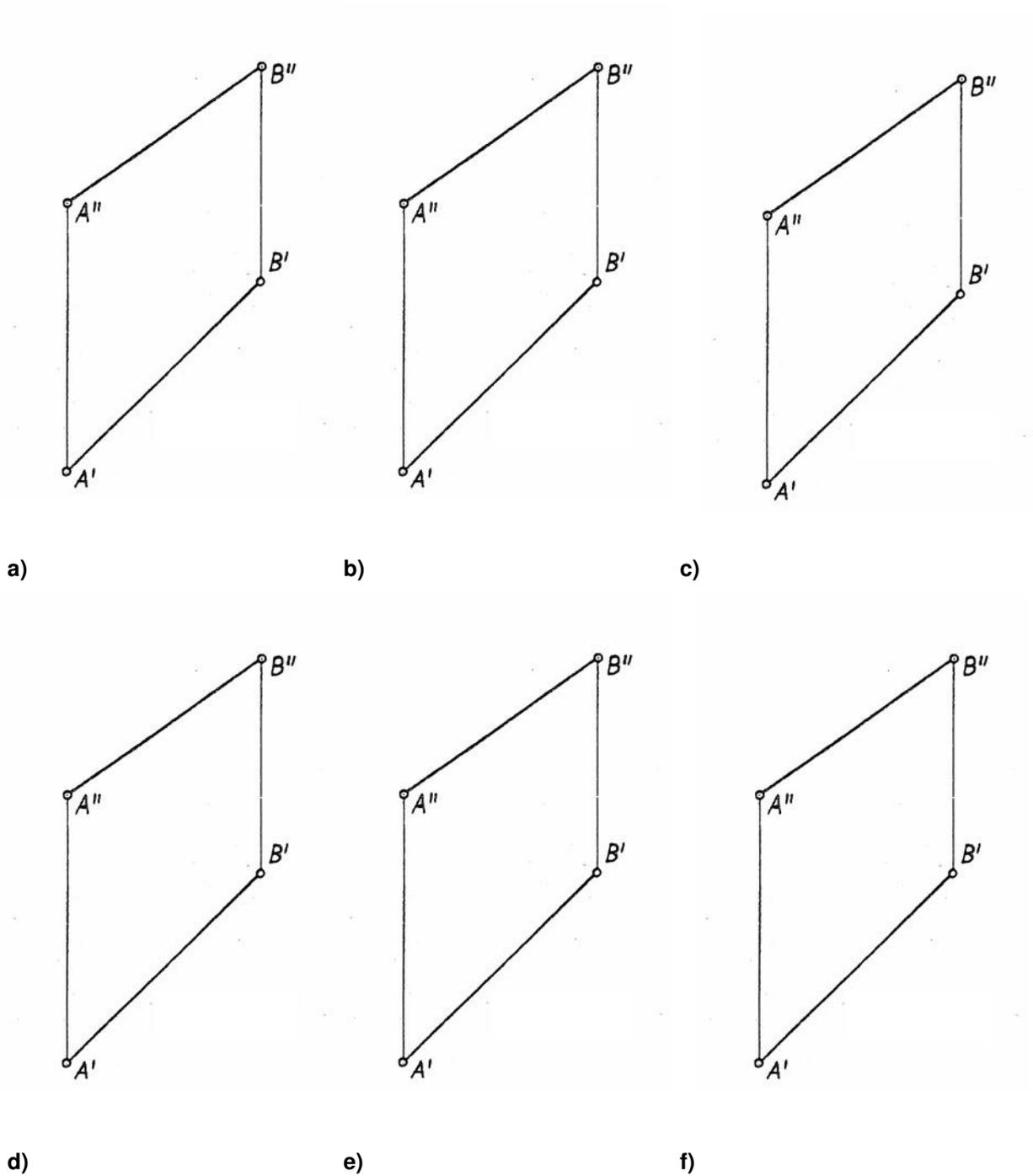


Abbildung 9-20

Gleichzeitig ergeben sich folgende **Winkel in wahrer Größe**:

$\alpha_1 =$ Winkel zwischen AB und π_1
 $\alpha_2 =$ Winkel zwischen AB und π_2

Mittels des oben genannten Verfahrens können auch folgende Abstände ermittelt werden:

- Abstand **d von einem Punkt zu einer Ebene** [siehe 9.3.1]
→ $d = wL(PF)$
- Abstand **d von einem Punkt zu einer Geraden**
→ $d = wL(PF)$
- Abstand **zweier paralleler Geraden**
→ Abstand von einem Punkt, der auf der einen Gerade liegt, zu einer anderen Geraden
- Abstand **von einer Geraden zu einer ihr parallelen Ebene**
→ Abstand von einem Punkt, der auf der Geraden liegt, zu der Ebene
- Abstand **zweier zueinander paralleler Ebenen**
→ Abstand von einem Punkt, der in der einen Ebene liegt, zu einer anderen Ebene

10 Grundkonstruktionen im Zweitafelsystem

10.1 Abtragen einer Strecke von gegebener wahrer Länge

Gegeben: Gerade g , Punkt P auf g , wahre Länge d einer Strecke PQ von g

Gesucht: Punkt Q auf der Geraden g , so dass $wL(PQ) = d$ ist
(Punkt Q soll höher als P liegen)

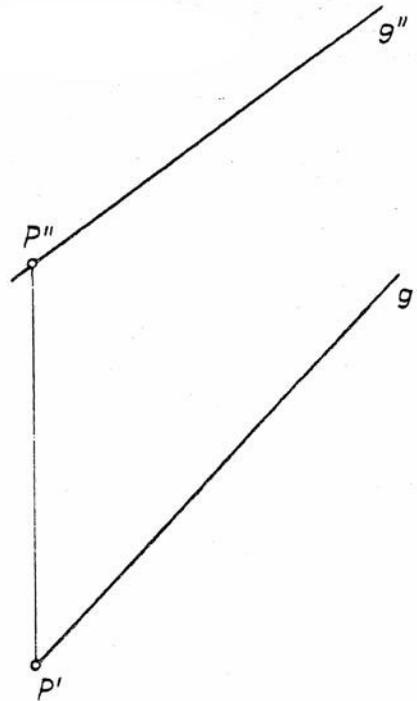
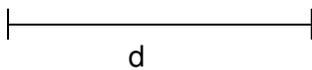


Abbildung 10-1

Lösung:

Man wählt einen beliebigen Hilfspunkt $H \neq P$ auf der Geraden g aus. Wie in 9.4.1 wird die Gerade $PH = g$ in eine zu einer Bildtafel parallelen Lage $PH_0 = g_0$ geklappt, bzw. gedreht. Ist $g_0 \parallel \pi_1$, so erscheint auf g_0' jede Strecke der Geraden in wahrer Länge, also auch die Strecke $\overline{PQ_0}$ von der Länge d . Den Punkt Q auf der Geraden g erhält man durch Zurückklappen, bzw. -drehen von g_0 auf g und damit von Q_0 auf Q .



10.2 Wahre Größe und Gestalt eines ebenen Vielecks

Gegeben: Dreieck ABC in Grund- und Aufriss

Gesucht: Wahre Größe und Gestalt des Dreiecks ABC

(Vergleich zum Basteln!)

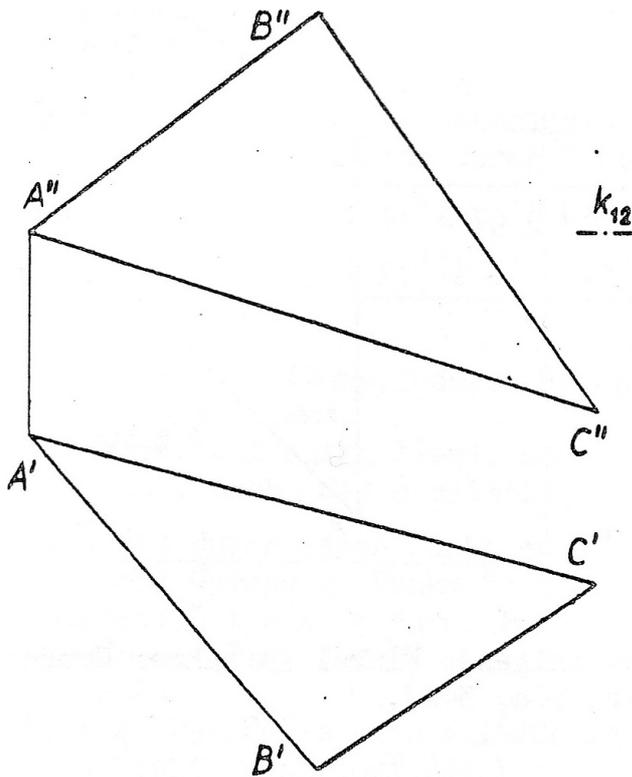


Abbildung 10-2 – Variante 1

1. Lösung

Man führt eine zur Dreiecksebene ε und zu π_1 **senkrechte Bildtafel** π_4 ein. Dabei ist p_1 Höhenlinie und $p_1' \perp k_{14}$. k_{14} kann man so legen, dass $C^{IV} = C^I$ (mit Abstandsregel übertragen). Verwendet man die Gerade ε^{IV} als neue Risskante k_{45} eines weiteren **Zweitafel systems** $\pi_4\pi_5$, so ist das Dreieck $A^VB^VC^V = wG(\Delta ABC)$, weil dann ABC in π_5 liegt. Liegt statt des Dreiecks ein anderes ebenes Vieleck vor, so erhält man dessen wahre Größe im 5. Riss auf dieselbe Weise.

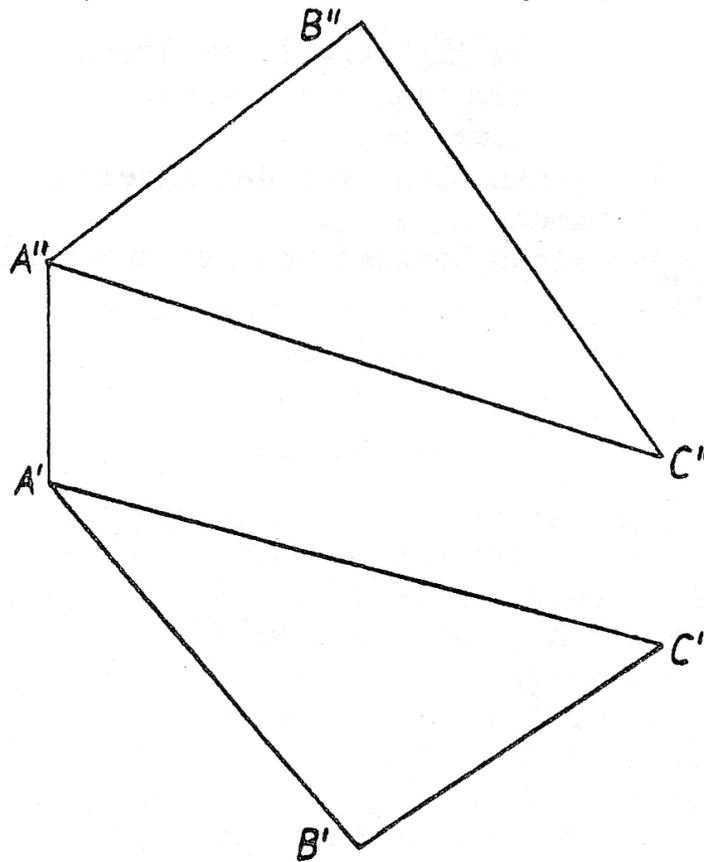


Abbildung 10-3 – Variante 2

2. Lösung

Um die (zweckmäßig durch A gelegte) Höhenlinie p_1 der Dreiecksebene ε wird das Dreieck ABC in eine zu π_1 parallele Lage AB_0C_0 gedreht. A bleibt als Punkt der Drehachse p_1 dabei liegen. Der Kreis, auf dem B bei der Drehung wandert, hat einen **Radius r**, der nach dem Verfahren aus Kapitel „9.4.1 Wahre Länge einer Strecke“ bestimmt wird: Grundriss des Drehkreisradius $\perp p_1'$, Höhenunterschied seiner Endpunkte = Abstand(B'' , p_1'').

In der zu π_1 parallelen Lage erscheint der Drehkreisradius im Grundriss in wahrer Länge, und zwar wieder $\perp p_1'$. Damit ist **B_0' konstruiert**. C_0' liegt auf dem Lot zu p_1' durch C' (Grundriss des Drehkreises von C). und auf der Verbindungsgeraden von B_0' mit dem Grundriss von $BC \cap p_1$, weil alle Punkte der Drehachse p_1 bei der Drehung liegen bleiben. $\rightarrow \Delta A'B_0'C_0' = wG(\Delta ABC)$.

Liegt statt des Dreiecks ein anderes ebenes Vieleck vor, so wird jeder weitere Eckpunkt behandelt wie hier Punkt C. Die wahre Länge eines Drehkreisradius muss also stets nur **einmal** ermittelt werden (wie hier beim Punkt B).

10.3 Abtragen von Winkeln gegebener Größe

Gegeben: Winkel γ ; Ebene ε (durch Dreieck ABC)

Gesucht: Geraden g und h, die mit AB den Winkel γ bilden. Der Scheitel sei bei A.

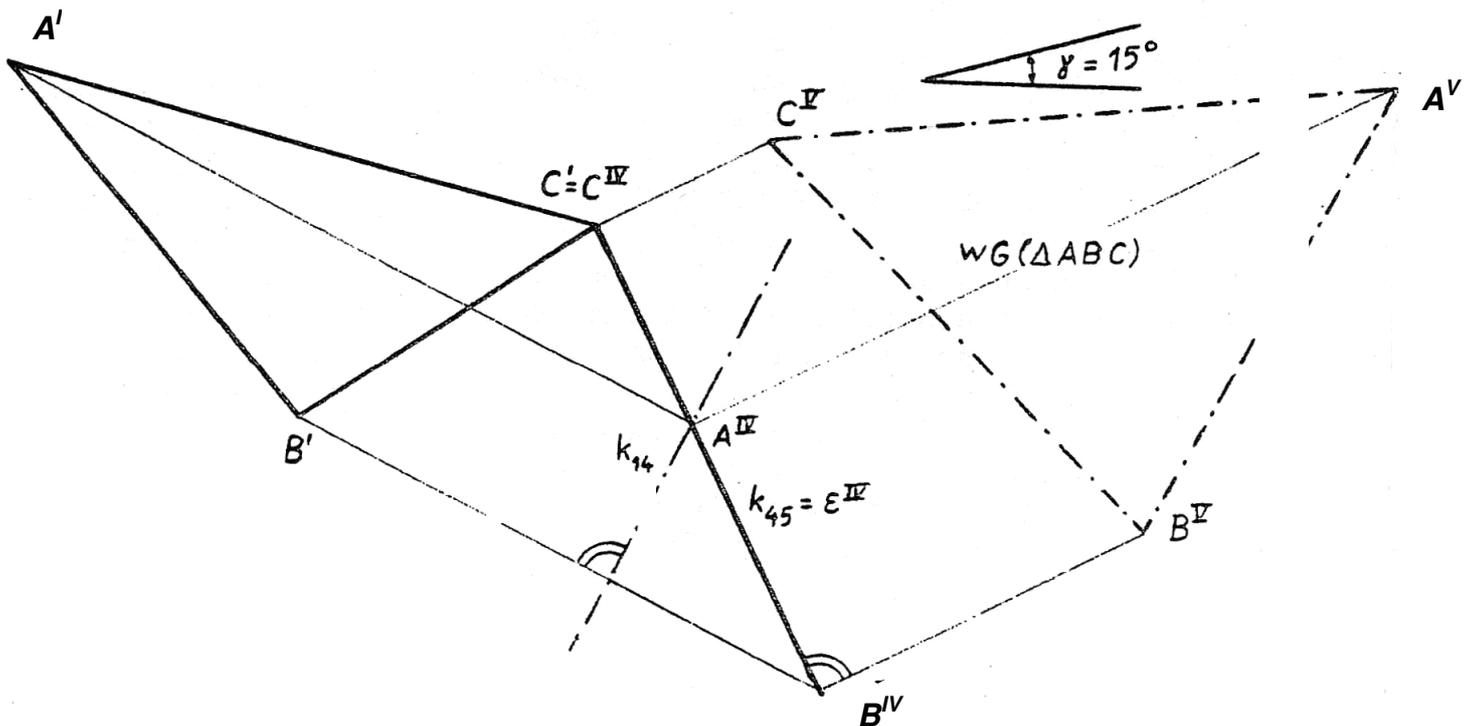


Abbildung 10-4

Lösung

Ausgangssituation wie in Abb. 10-2 konstruiert. Im fünften Riss erscheint das Dreieck ABC und damit der Winkel γ in wahrer Größe; so erhält man die fünften Risse von g und h. Man kann die Schnittpunkt mit der Geraden BC ermitteln: G^V und H^V . Daraus ergeben sich alle anderen Risse von G, H, g und h.

11 Ebene Schnitte und gegenseitige Durchdringung ebenflächig begrenzter Körper

11.1 Ebener Schnitt eines ebenflächig begrenzten Körpers

Ist die schneidende Ebene senkrecht zu einer Bildtafel, so erhält man in diesem Riss unmittelbar alle Eckpunkte der Schnittfigur, indem man die Risse der Körperkanten mit dem Riss der Ebene schneidet. Gegebenenfalls führt man daher eine neue Bildtafel senkrecht zur schneidenden Ebene ein.

Beispiel:

Die in Abb. Abbildung 11-1 durch Grund- und Aufriss gegebene Pyramide ABCD wird von der zu π_2 senkrechten Ebene ε in einem Dreieck EFG geschnitten (Punkt E liegt auf Geraden AD, F auf BD und G auf CD). Man konstruiere den Grundriss und die wahre Gestalt des Dreiecks EFG, sowie die Abwicklung des Pyramidenstumpfes ABCEFG.

Grundriss des Dreiecks EFG:

- E'', F'' und G'' erhält man im Aufriss aus den Schnittpunkten von ε mit den Kanten der Pyramide
- Durch Ordnungslinien erhält man auch E', F' und G'
- $wG(\Delta EFG)$ erhält man entweder in einem neuen Riss ($\pi_5 \parallel \varepsilon$, also ist $\pi_5 \perp \pi_2$, $k_{25} = \varepsilon''$ oder $k_{25} \parallel \varepsilon''$) oder durch Drehung von ε in eine zu π_1 parallele Lage (z. B. um ihre Grundrissspur).

Abwicklung des Pyramidenstumpfes:

- Zuerst wickelt man die Pyramide ab, dazu ermittelt man die wahre Länge der Pyramidenkanten.
- Man überträgt die Punkte E, F und G.
- Drehachse $\perp \pi_1$ durch D; bei der Drehung AD, BD und CD in zu π_2 parallele Lagen werden die Punkte E, F und G mitgenommen.
- Schließlich ergänzt man die Abwicklung durch die Schnittkanten und die Schnittfigur ΔEFG
- \hat{A} (A Dach) = Punkt A in der Abwicklung.

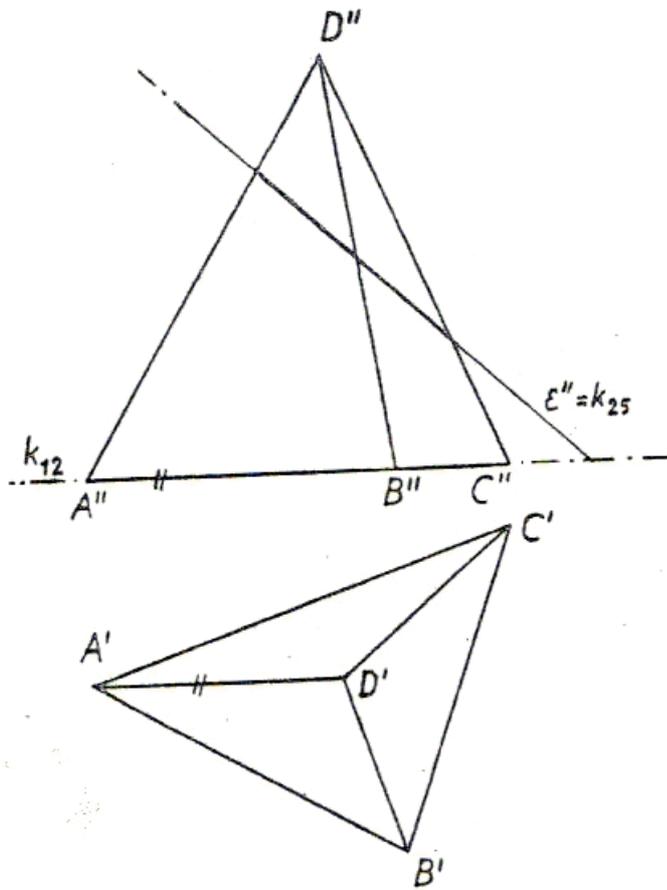
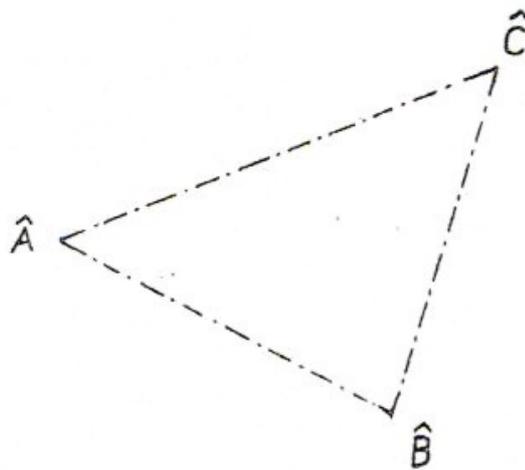


Abbildung 11-1

Abbildung 11-2



11.2 Durchdringung ebenflächig begrenzter Körper

Die Schnittfigur ist stets konstruierbar durch wiederholte Anwendung der Grundkonstruktion wie in „9.2.2 Schnittgerade zweier Ebenen“. Ist jedoch einer der beteiligten Körper prismatisch, kann man eine Bildtafel senkrecht zu den zueinander parallelen Prismenkanten verwenden. Die Schnittfigur ist dann wie in 11.1 im betreffenden Riss unmittelbar erhältlich. Sind die zueinander parallelen Prismenkanten nicht senkrecht zu einer der gegebenen Tafeln, aber parallel zu einer von ihnen, so bildet eine neue Bildtafel senkrecht zu den Prismenkanten mit dieser ein Zweitafelsystem.

Sind die Prismenkanten nicht parallel zu einer der gegebenen Tafeln, so muss vorher noch eine Tafel eingeführt werden, die parallel zu den Prismenkanten und senkrecht zu einer gegebenen Tafel ist.

Beispiel

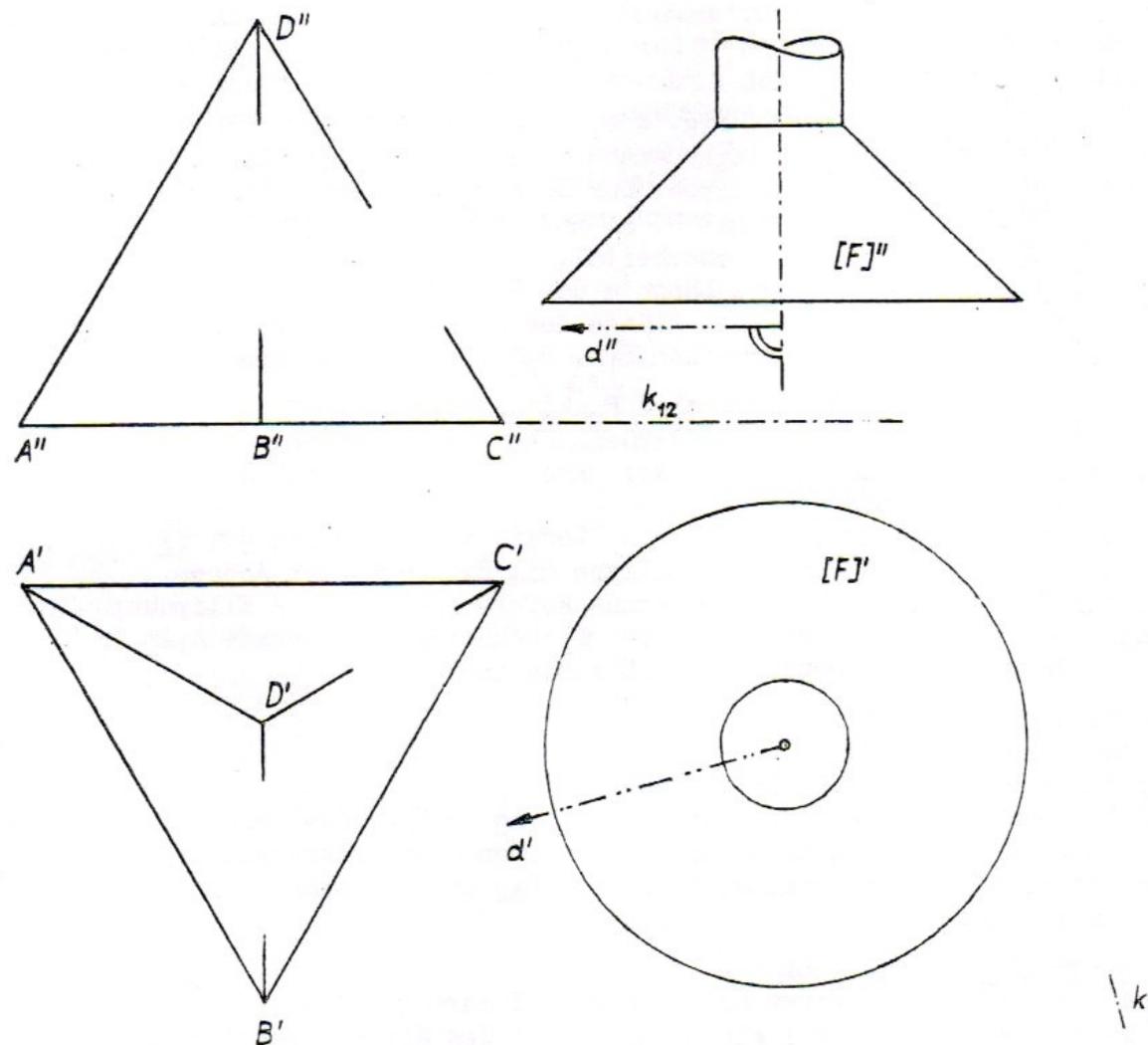
Der in **Abbildung 11-2** gegebene Fräser [F] bewegt sich in der angegebenen Richtung d ($d \parallel \pi_1$). Man konstruiere Grund- und Aufriss der Figur, die er dabei aus der Pyramide ABCD herauschneidet.

Anleitung

Bei seiner Bewegung überstreicht der Fräser ein Prisma, dessen Verschneidung mit der Pyramide die gesuchte Schnittfigur bildet. Führt man eine neue Bildtafel π_4 senkrecht zur Bewegungsrichtung d des Fräasers ein, so sind die vom Fräser überstrichenen Begrenzungsflächen des Prismas senkrecht zu π_4 ; die Schnittfigur ist somit im vierten Riss sofort erhältlich und kann von dort in Grund- und Aufriss übertragen werden.

Da $d \parallel \pi_1$ ist, ist $\pi_1 \perp \pi_4$. Es bilden π_4 und π_1 ein Zweitafelsystem, wobei $k_{14} \perp d'$ ist. Die Abwicklung der Pyramide samt Schnittfigur kann wie in 10.1. konstruiert werden.

Abbildung 11-2



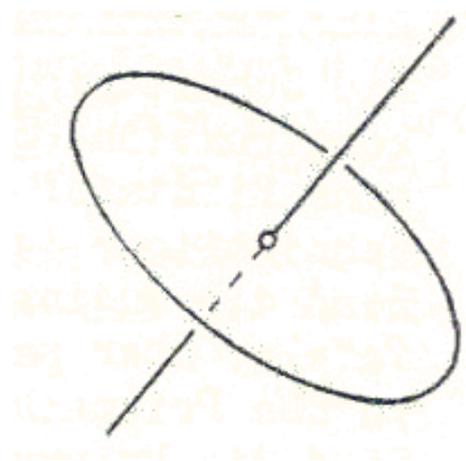
12 Senkrechte Parallelprojektion eines Kreises

Durch senkrechte Parallelprojektion wird ein Kreis im allgemeinen Fall (Drehachse I des Kreises nicht parallel oder senkrecht zur Bildtafel) auf eine Ellipse abgebildet. Ihre große Achse (größter Ellipsendurchmesser) ist der Riss des zur Bildtafel parallelen Kreisdurchmessers, daher gilt bei senkrechter Parallelprojektion:

Die große Achse der Bildellipse eines Kreises hat die Länge des Kreisdurchmessers und liegt senkrecht zum Riss der Drehachse des Kreises.

Die kleine Achse (kleinster Ellipsendurchmesser) liegt senkrecht zur großen Achse, somit auf dem Riss der Drehachse des Kreises. (Abbildung 11-1)

Abbildung 12-1: Parallelprojektion eines Kreises mit Drehachse



12.1 Begriffe und einige Ellipsenkonstruktionen

A_1 und A_2 sind die Haupt-, B_1 und B_2 die Nebenscheitel der Ellipse. Die Gerade A_1A_2 ist die Hauptachse (B_1B_2 die Nebenachse). Haupt- und Nebenachse stehen senkrecht auf einander und schneiden sich im Ellipsenmittelpunkt M . Zur Konstruktion benötigt man die Entfernung von A_1 nach A_2 . Diese Strecke nennt man die große Achse bzw. die Strecke $\overline{A_1M}$ große Halbachse (Länge der großen Halbachse $a = \overline{A_1M}$). Analog ist B_1B_2 die Nebenachse, $\overline{B_1M}$ die kleine Halbachse und $b = \overline{B_1M}$ die Länge der kleinen Halbachse. Haupt- und Nebenachse sind Symmetrieachsen der Ellipse. Die Länge a der Strecken $\overline{A_1M}$ und $\overline{A_2M}$ stellt den Kreisradius dar.

12.1.1 Punkt und Tangente

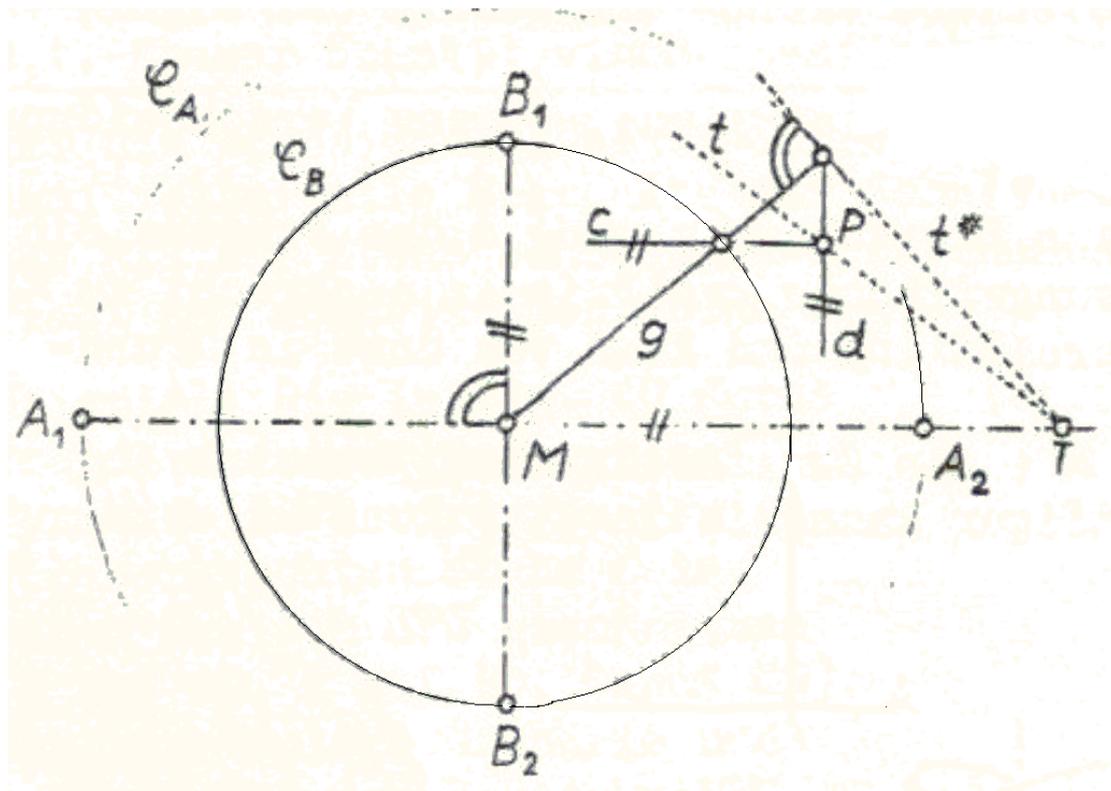


Abbildung 12-2: Punkt und Tangente

Ziel: Konstruktion eines Ellipsenpunktes nebst Tangente, wenn die Haupt- und Nebenscheitel gegeben sind.

Lösung zu Abbildung 12-2:

Beide Ellipsenachsen sind gegeben (A_1A_2 und B_1B_2).

Um nun einen Ellipsenpunkt nebst Tangente zu erhalten, konstruieren wir einen Kreis C_A um M mit Radius a (Länge der großen Halbachse) und einen weiteren Kreis C_B um M mit Radius b (Länge der kleinen Halbachse). Anschließend zeichnen wir eine Gerade g durch den Mittelpunkt M die sowohl den Kreis C_B und Kreis C_A schneidet und die nicht identisch mit den Haupt- und Nebenachsen ist. Die Gerade c ist parallel zu der Hauptachse A_1A_2 und enthält den Schnittpunkt von Gerade g und Kreis C_B . Eine weitere Gerade d verläuft parallel zu der Nebenachse B_1B_2 durch den Schnittpunkt von g mit dem Kreis C_A . Der Schnittpunkt der Geraden c und d ist nun ein Punkt P der Ellipse. Im Schnittpunkt $g \cap C_A$ wird die Tangente t^* an C_A konstruiert. Diese schneidet die Verlängerung der Hauptachse in T . Die Gerade $t = PT$ ist die Tangente an die Ellipse im Punkt P . Aus Symmetriegründen lassen sich jetzt noch drei weitere Punkte finden, die ebenfalls auf der Peripherie der Ellipse liegen.

12.1.2 Scheitelkrümmungskreiskonstruktion

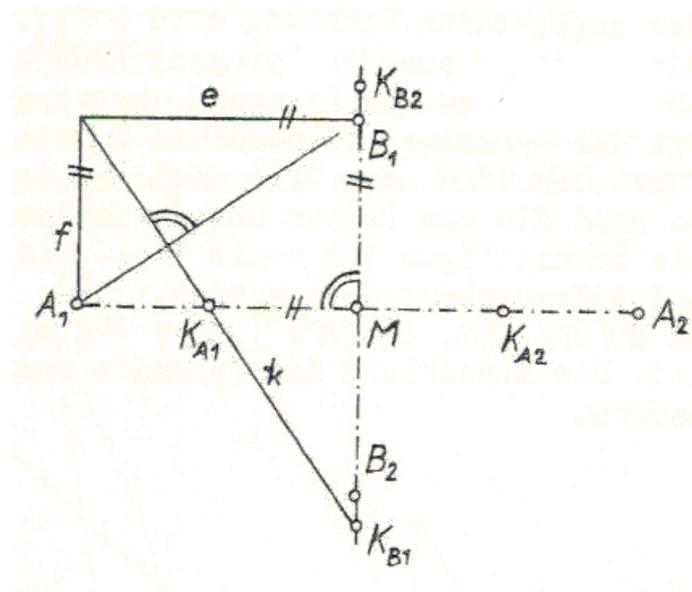


Abbildung 12-3: Scheitelkrümmungskreiskonstruktion

Die Ellipsenachsen A_1A_2 und B_1B_2 sind gegeben.

Nun zeichnen wir eine Gerade e , die parallel zu der Hauptachse und durch den Punkt B_1 verläuft. Eine weitere Gerade f ist parallel zu der Nebenachse und enthält A_1 . Durch den Schnittpunkt beider Geraden konstruiert man eine Senkrechte zur Geraden A_1B_1 . Diese Senkrechte schneidet A_1A_2 in K_{A1} und B_1B_2 in K_{B1} . K_{A1} ist Mittelpunkt des Scheitelkrümmungskreises, der den Hauptscheitel A_1 enthält (K_{B1} ist Mittelpunkt des Scheitelkrümmungskreises, der den Nebenscheitel B_1 enthält). Spiegelt man K_{A1} und K_{B1} an jeweils an der Achse, erhält man die Mittelpunkte der beiden anderen Scheitelkrümmungskreise.

12.1.3 Papierstreifenkonstruktion

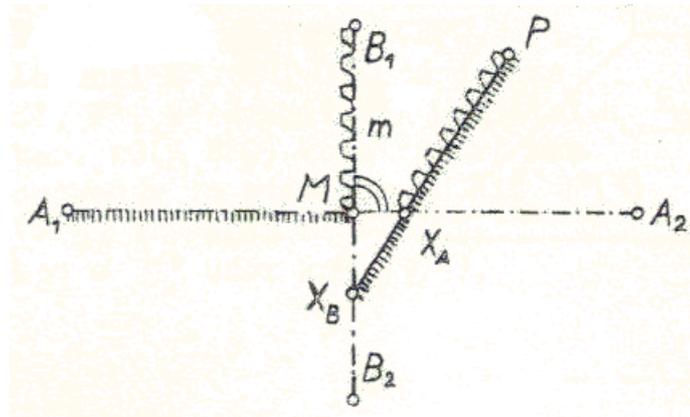


Abbildung 12-4: Papierstreifenkonstruktion

Gegeben: Die große Achse mit den Hauptscheiteln A_1 und A_2 und eine weiterer Ellipsenpunkt P

Gesucht: Die Nebenscheitel B_1 und B_2

Konstruktion: Lot auf die Hauptachse A_1A_2 im Mittelpunkt M . Kreis mit Radius $\frac{\overline{A_1A_2}}{2}$ um den

Ellipsenpunkt P . Der Schnittpunkt mit dem Lot sei X_B .

Nun verbinden wir P und X_B und erhalten somit den Schnittpunkt X_A mit der Geraden A_1A_2 .

Die Länge der Strecke $[PX_A]$ ist die Länge der kleinen Halbachse. Konstruieren wir nun einen Kreis mit den Radius $\overline{PX_A}$ um den Mittelpunkt M . Dessen Schnittpunkte mit der Nebenachse sind die gesuchten Nebenscheitel B_1 und B_2 .

12.2 Grund- und Aufriss eines Kreises

Drehachse l , Mittelpunkt M und Radius a des abzubildenden Kreises \mathcal{K} sind gegeben.

12.2.1 Sonderfall

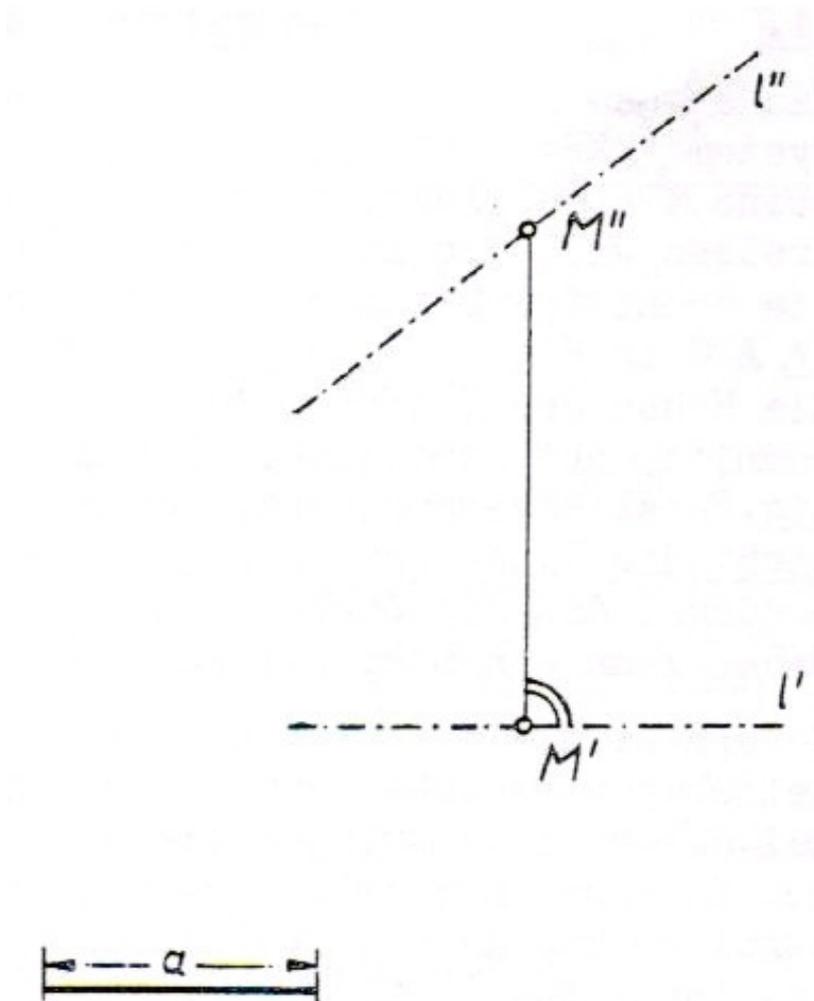


Abbildung 12-5

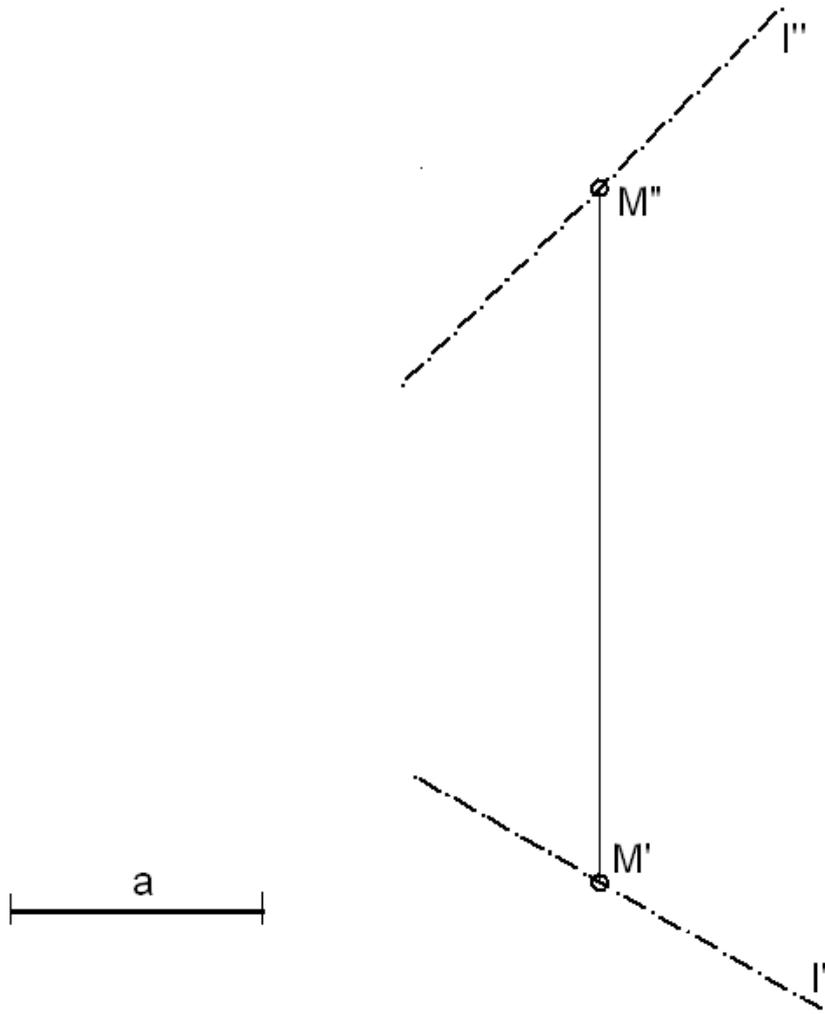
Die Drehachse l ist parallel zur Aufrissebene π_2 . Der Aufriss von \mathcal{K} entsteht durch das Lot auf l'' mit der Länge $2a$ durch den Mittelpunkt M'' . Der Grundriss von \mathcal{K} ist eine Ellipse. Die große Halbachse wird nach folgendem Satz konstruiert:

Die große Halbachse der Bildellipse eines Kreises hat die Länge des Kreisdurchmessers und liegt senkrecht zum Riss der Drehachse des Kreises.

Also ist A_1A_2 senkrecht zu l' und hat die Länge $2a$. Die Punkte P' und Q' erhält man durch senkrechte Projektion der Punkte P'' und Q'' (Endpunkte der Lotes auf l'') an der Aufrissebene π_2 ($l' \parallel$ zu π_2). Nun ist \mathcal{K}' konstruierbar. (siehe 11.1.)

12.2.2 Allgemeiner Fall

Die Drehachse l befindet sich in beliebiger Lage.



Hier führt man die Konstruktion auf den Sonderfall durch Einführung neuer Bildtafel auf den Sonderfall zurück. Z. B. wähle man π_4 parallel l oder π_4 durch l . Außerdem sei π_4 senkrecht zu π_1 . Oder man wähle π_5 parallel zu l oder π_5 durch l . π_5 sei senkrecht zu π_2 . χ^{IV} ist dann Lot zu l^{IV} durch M^{IV} bzw. χ^V ist Lot zu l^V durch M^V . Ordnungslinien aus dem 4. bzw. 5. Riss

ergeben die Endpunkte der kleinen Achse von \mathcal{K}' bzw. \mathcal{K}'' : Vereinfachung: Trägt man auf l^V von $l' \cap l^V$ aus die Länge a ab, so hat der Endpunkt einen Abstand von l' , der gleich der Länge der kleinen Halbachse von \mathcal{K}' ist. Zum Beweis betrachte man die auftretenden kongruenten Dreiecke. Entsprechendes gilt für \mathcal{K}'' , wenn man l'' und l^V in gleicher Weise verwendet.

Die große Achse von \mathcal{K}' ist senkrecht zu l' , die von \mathcal{K}'' senkrecht zu l'' . Beide haben die Länge des Kreisdurchmessers. Die große Achse von \mathcal{K}' ist Grundriss des zu π_1 parallelen Kreisdurchmessers, dessen Aufriss ist parallel zu k_{12} . Die Aufrisse seiner Endpunkte - also zwei weitere Punkte von \mathcal{K}'' - erhält man durch Ordnungslinien aus dem Grundriss.

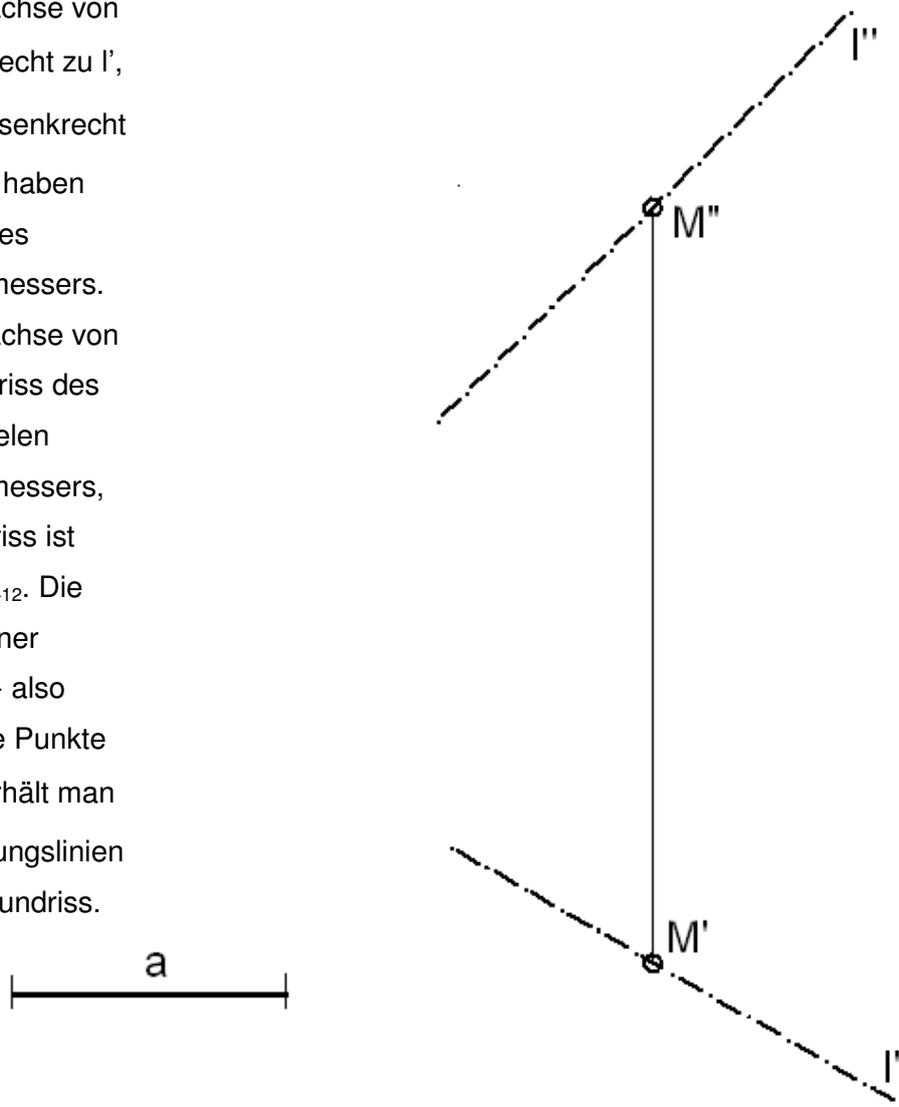


Abbildung 12-6: Anwendung der Papierstreifenkonstruktion

Die kleine Halbachse von \mathcal{K}'' konstruiert man nach der Papierstreifenkonstruktion. Ebenso erhält man die kleine Halbachse von \mathcal{K}' , wenn man die Rollen von Grund- und Aufriss vertauscht.

13 Umriss gekrümmter Flächen

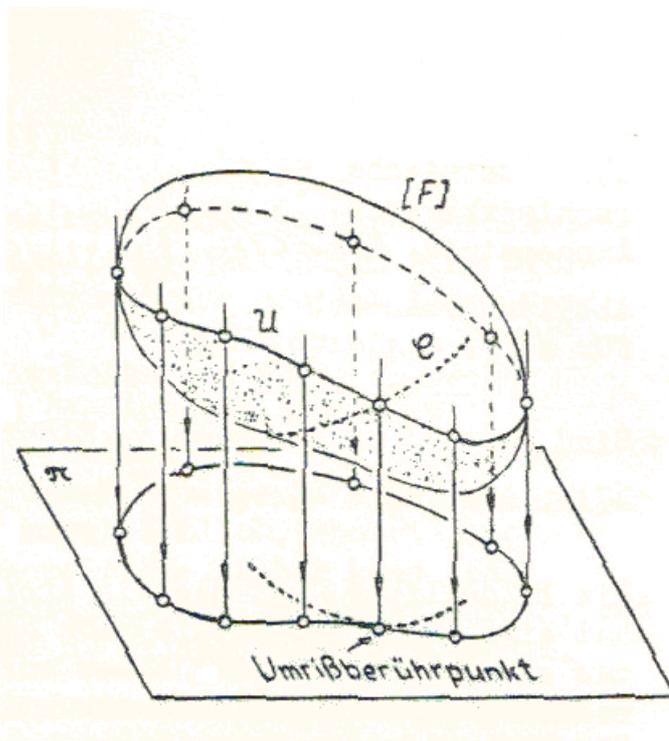


Abbildung 13-1: Eine gekrümmte Fläche $[F]$ wird in eine Bildtafel π abgebildet.

Alle Punkte von $[F]$, in denen $[F]$ von den Projektionsstrahlen berührt wird – Kurve u in Abbildung 12-1, erscheint im betreffenden Riss als Umriss von $[F]$. Bei rechtwinkliger Parallelprojektion ist in jedem dieser Berührungspunkte die Tangentialebene an $[F]$ senkrecht zur jeweiligen Bildtafel.

Umrisskurven trennen im jeweiligen Riss die sichtbaren Teile von Flächen von den verdeckten Teilen.

Ist C eine Kurve auf $[F]$, die u schneidet, und ist im Schnittpunkt die Tangentenrichtung von C nicht die Projektionsrichtung, so berührt der Riss von C den Riss der Umrisskurve u (der sogenannte „wahre Umriss“) im Riss des Schnittpunktes („Umrissberührungspunkt“).

13.1 Kugel

Der Umriss einer Kugel ist immer ein Kreis.

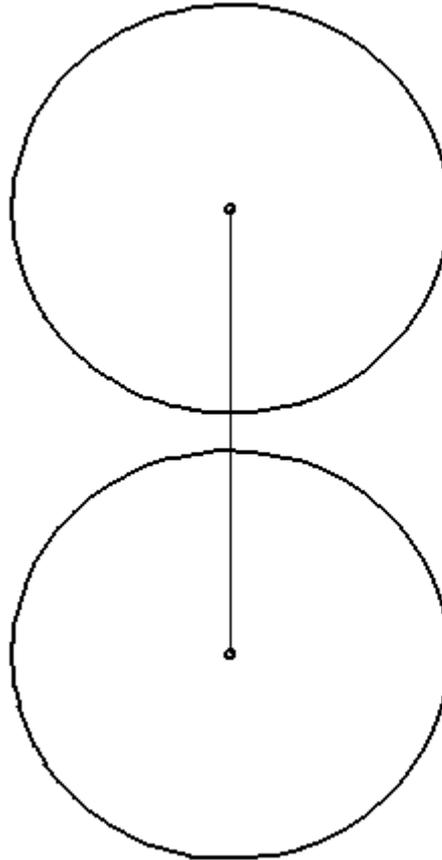


Abbildung 13-2: Kugel

\mathcal{U}_1 = Kreis auf der Kugel, der im Grundriss als Kugelumriss erscheint,

\mathcal{U}_2 = Kreis auf der Kugel, der im Aufriss als Kugelumriss erscheint.

13.2 Kegel

Ein Kegel wird gebildet von der Gesamtheit aller Geraden, die durch einen festen Punkt A gehen, und eine Kurve \mathcal{L} schneiden. (\mathcal{L} liegt nicht mit A in einer Ebene). Jede der Geraden ist Mantellinie des Kegels. \mathcal{L} ist die Leitkurve, A ist die Spitze des Kegels. Ist \mathcal{L} ein Kreis, so erhält man einen Kreiskegel, und zwar einen geraden Kreiskegel oder Drehkegel, wenn A auf der Drehachse des Kreises \mathcal{L} liegt (sie ist dann zugleich Kegelachse), sonst einen schiefen Kreiskegel.

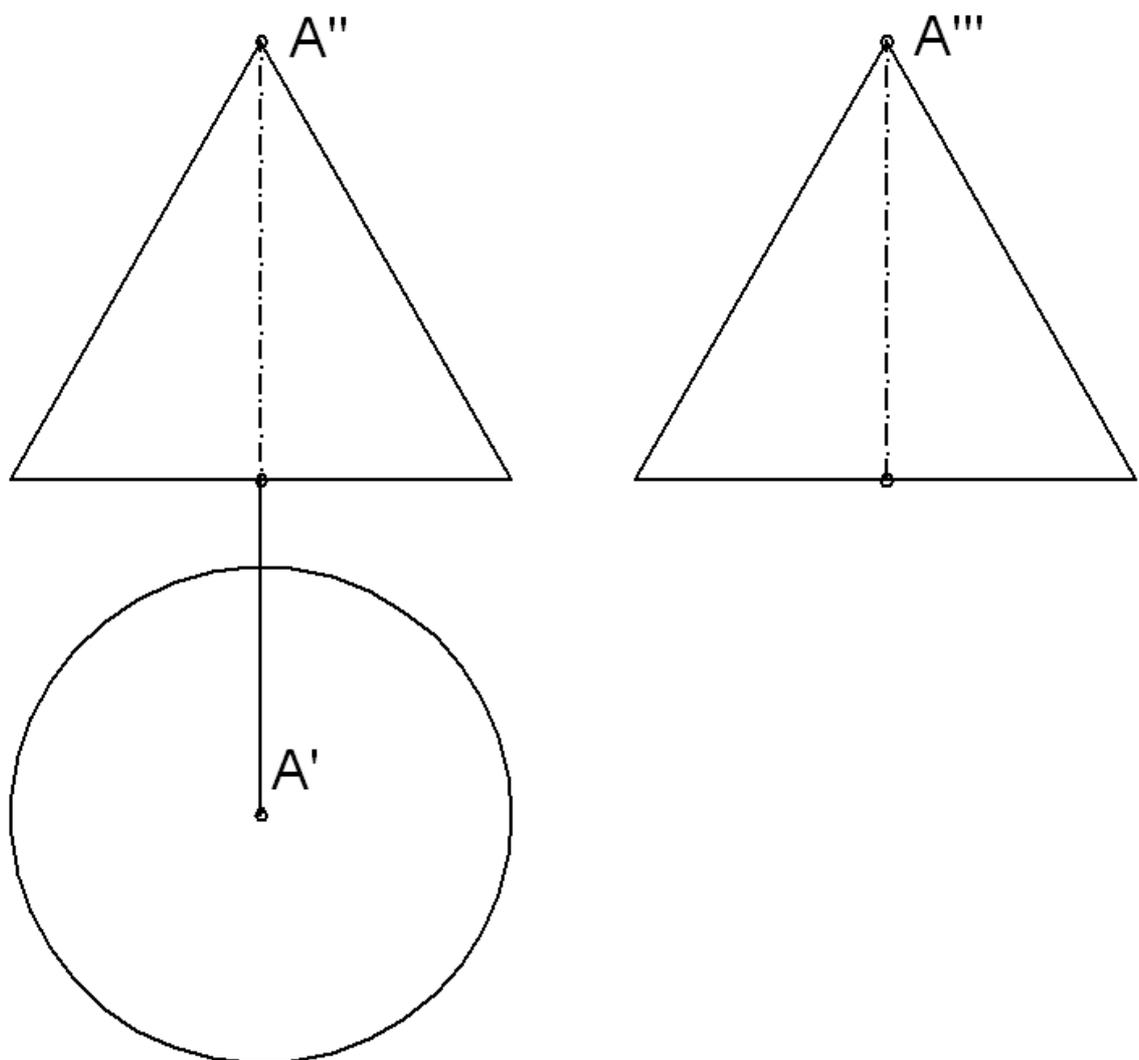


Abbildung 13-3: Drehkegel

Drehkegel (Achse senkrecht π_1), m_2, n_2 sind Mantellinien, die im Aufriss als Kegelumriss erscheinen. m_3, n_3 sind Mantellinien, die im Kreuzriss als Kegelumriss erscheinen. Im Grundriss erscheint kein Umriss! Der Leitkreis, der den Grundriss des dargestellten Kegelteils begrenzt, ist keine Umrisskurve im oben erläuterten Sinn.

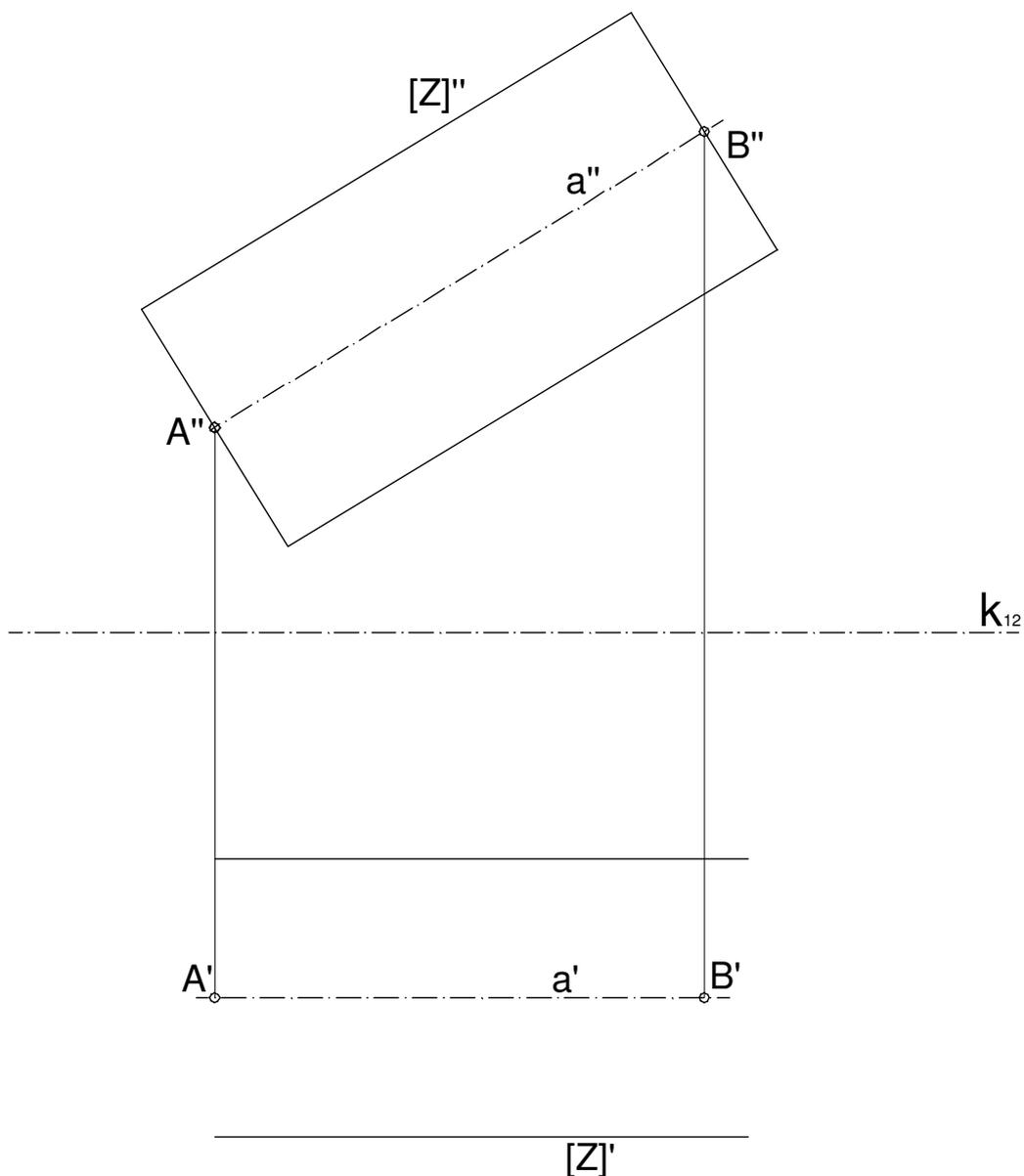
13.3 Zylinder

Ersetzt man in der Beschreibung der Kegel den festen Punkt A durch eine feste Richtung (alle Mantellinien sind also dann zueinander parallel), so erhält man statt der Kegel die entsprechenden Zylinder.

13.3.1 Zylinder in spezieller Lage

Konstruieren Sie in der folgenden Abbildung die Grundrisse der beiden Kreise, die den Zylinder begrenzen.

Abbildung 13-4: Kreiszyylinder parallel zur Aufrisstafel



13.3.2 Zylinder in allgemeiner Lage

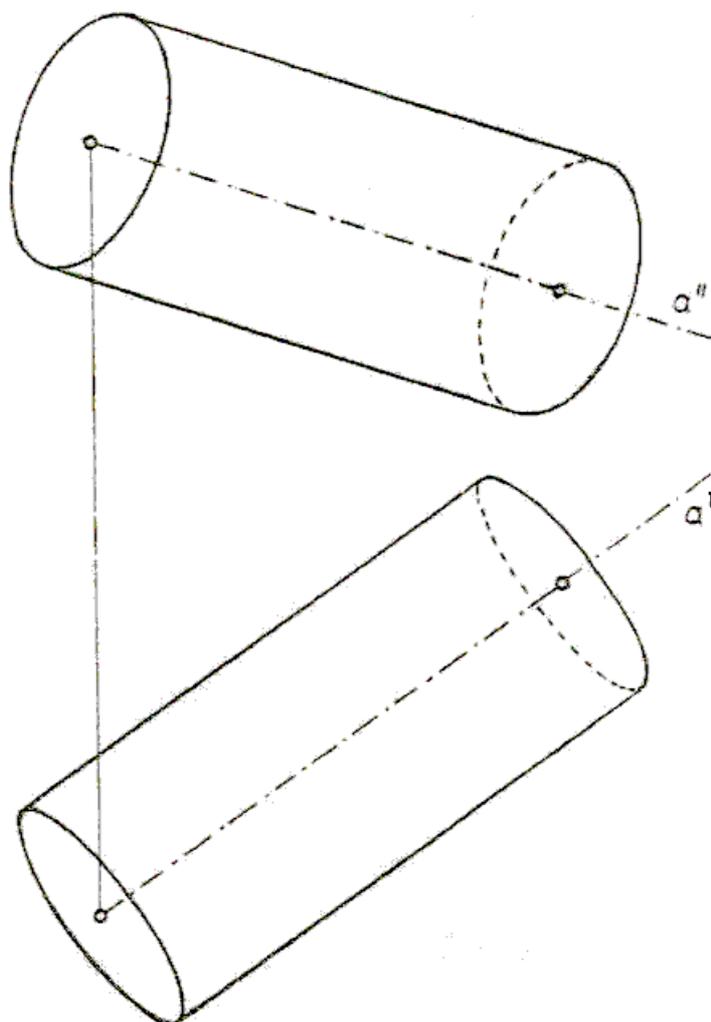


Abbildung 13-5: Kreiszylinder

Kreiszylinder (Achse a in allgemeiner Lage)

m_1, n_1 = Mantellinien, die im Grundriss als Zylinderumriss erscheinen.

m_2, n_2 = Mantellinien, die im Aufriss als Zylinderumriss erscheinen.

14 Symbolik und Abkürzungen an ausgewählten Beispielen

| | |
|--|---|
| Punkt | P |
| Grundriss eines Punktes (Punkt in der Grundrisstafel π_1) | P' |
| Aufriss eines Punktes (Punkt in der Aufrisstafel π_2) | P'' |
| Allgemeiner Riss eines Punktes (Punkt in der allgemeinen Risstafel) | $P^{(n)}$ |
| Gerade ... enthält die Punkte A und B | a AB |
| Strecke bzw. Länge der Strecke | \overline{AB} |
| Abstand der Punkte A, B | $d(A,B)$ |
| Abstand des Punktes P von einer Geraden g | $d(P,g)$ |
| Kurve | \mathcal{K} |
| Fläche bzw. Körper | $[F]$ |
| Ebene | ε |
| Wahre Länge einer Strecke | $wL(AB)$ |
| Wahre Gestalt eines Dreiecks | $wG(\triangle ABC)$ |
| Hauptscheitel einer Ellipse | A_1, A_2 |
| Nebenscheitel einer Ellipse | B_1, B_2 |
| Länge der großen Halbachse | $a = \overline{A_1M} = \overline{A_2M}$ |
| Länge der kleinen Halbachse | $b = \overline{B_1M} = \overline{B_2M}$ |